C*-algèbres, Algèbres de von Neumann, Exemples

Georges Skandalis

1 Rappels sur les espaces hilbertiens

1.1 Produits scalaires

1.1 Définition. Soient E, F, G des espaces vectoriels complexes.
- Une application $f : E \to G$ est dite *antilinéaire* si, pour tout $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(\lambda x) = \overline{\lambda} f(x)$.
- Une application $B : E \times F \to G$ est dite *sesquilinéaire* si l'application $y \mapsto B(x, y)$ est linéaire (de F dans G) et l'application $y \mapsto B(y, x)$ antilinéaire (de E dans G).
- Une *forme sesquilinéaire* sur E est une application sesquilinéaire $B : E \times E \to \mathbb{C}$.

Rappelons qu'une application bilinéaire $B : E \times E \to F$ (sur un corps K) est dite *symétrique* si, pour tout $x, y \in E$, on a $B(y, x) = B(x, y)$.

1.2 Identité de polarisation. *a) Soient E, F des espaces vectoriels sur un corps K et $B : E \times E \to F$ une application bilinéaire. Pour tout $x, y \in E$ on a On a $B(x+y, x+y) - B(x-y, x-y) = 2(B(x, y) + B(y, x))$. Si B est symétrique, on a $4B(x, y) = B(x+y, x+y) - B(x-y, x-y)$.*

b) Soient E, F des espaces vectoriels complexes et $B : E \times E \to F$ une application sesquilinéaire. Pour tout $x, y \in E$ on a

$$4B(x, y) = B(x+y, x+y) - B(x-y, x-y) - iB(x+iy, x+iy) + iB(x-iy, x-iy).$$

Démonstration. a) La première assertion est claire et la deuxième s'en déduit.

b) Comme B est $\mathbb{R}$-bilinéaire, remplaçant y par iy, on trouve : $B(x+iy, x+iy) - B(x-iy, x-iy) = 2(B(x, iy) + B(iy, x)) = 2i(B(x, y) - B(y, x))$, d'où le résultat. □

En particulier, pour connaitre une forme sesquilinéaire ou une forme bilinéaire symétrique B, il suffit de connaitre $B(x, x)$ pour tout x.

1.3 Corollaire. *Soient E un espace vectoriel complexe et B une forme sesquilinéaire sur E. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) Pour tout $x, y \in E$ on a $B(y, x) = \overline{B(x, y)}$.

(ii) Pour tout $x \in E$, $B(x, x) \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Posons $S(x, y) = B(x, y) - \overline{B(y, x)}$. C'est une forme sesquilinéaire. Par l'identité de polarisation, S est nulle si et seulement si, pour tout $x \in E$, $S(x, x) = 0$. □

Soit E un espace vectoriel complexe. On appelle *forme hermitienne* sur E une forme sesquilinéaire vérifiant les conditions équivalentes de 1.3. Une forme hermitienne sur E est dite *positive* si, pour tout $x \in E$, $B(x,x) \in \mathbb{R}_+$.

Rappelons qu'une forme bilinéaire symétrique B sur un espace vectoriel réel E est dite *positive* si, pour tout $x \in E$, $B(x,x) \in \mathbb{R}_+$.

Convenons d'appeler *produit scalaire* une forme symétrique positive sur un espace réel ou une forme hermitienne positive sur un espace complexe. Le plus souvent, nous noterons les produits scalaires $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$.

On appelle *espace préhilbertien* (réel ou complexe) un espace vectoriel (réel ou complexe) muni d'un produit scalaire.

1.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz. *Soit E un espace préhilbertien. Pour tout $x,y \in E$ on a $|\langle x,y\rangle|^2 \leqslant \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$.*

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{K}$ de module 1 tel que $\langle x,y\rangle = u|\langle x,y\rangle|$. Pour $t \in \mathbb{R}$, $\langle ux+ty, ux+ty\rangle$ est positif. Or

$$\langle ux+ty, ux+ty\rangle = \langle ux,ux\rangle + t\langle ux,y\rangle + t\overline{\langle ux,y\rangle} + t^2\langle y,y\rangle = \langle x,x\rangle + 2t|\langle x,y\rangle| + t^2\langle y,y\rangle.$$

Ce polynôme du deuxième degré en t est positif en tout t, donc son discriminant est négatif ou nul. Cela donne $|\langle x,y\rangle|^2 - \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \leqslant 0$. □

1.5 Corollaire. *Soit E un espace préhilbertien. L'application $x \mapsto \langle x,x\rangle^{1/2}$ est une semi-norme sur E.*

Démonstration. Pour $x,y \in E$, on a $\langle x+y,x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} \leqslant \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + 2|\langle x,y\rangle| \leqslant (\langle x,x\rangle^{1/2} + \langle y,y\rangle^{1/2})^2$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

Tout espace préhilbertien sera considéré comme muni de la semi-norme ci-dessus.

1.6 Proposition. *Soit E un espace préhilbertien. Pour $x \in E$ la forme linéaire $f_x : y \mapsto \langle x,y\rangle$ est continue. L'application $x \mapsto f_x$ est antilinéaire et isométrique de E dans E'.*

Démonstration. Notons p la semi-norme de E. Pour $y \in E$ on a $|f_x(y)| \leqslant p(x)p(y)$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donc $f_x \in E'$ et $\|f_x\| \leqslant p(x)$. Or $p(x)^2 = f_x(x) \leqslant \|f_x\|p(x)$, d'où l'on déduit que $p(x) \leqslant \|f_x\|$.

On vérifie sans peine que l'application $x \mapsto f_x$ est antilinéaire. □

1.7 Définition. Soit E un espace préhilbertien. On dit que les éléments x et y de E sont orthogonaux si $\langle x,y\rangle = 0$. On dit que des parties A et B sont orthogonales si tout élément de A est orthogonal à tout élément de B. Soit A une partie de E. On appelle orthogonal de A l'ensemble $A^\perp$ des éléments de E orthogonaux à A.

Il est clair que $A^\perp = \bigcap_{x \in A} \ker f_x$. Donc $A^\perp$ est un sous espace fermé de E.

1.2 Espaces hilbertiens

1.8 Définition. Un *espace hilbertien* est un espace préhilbertien séparé et complet.

Soit (E,p) un espace semi-normé. On dira que p est issu d'un produit scalaire, s'il existe un produit scalaire $\langle\,,\rangle$ sur E tel que, pour tout $x \in E$ on ait $p(x) = \langle x,x\rangle^{1/2}$. Si un tel produit scalaire existe, il est unique, par l'identité de polarisation (1.2). On dira que (E,p) est un espace préhilbertien, si p est issu d'un produit scalaire. On dira que (E,p) est un espace hilbertien, s'il est préhilbertien séparé et complet.

1.9 Exercice. Soit E un espace préhilbertien. Démontrer que le séparé-complété de E est un espace hilbertien.

1.3 Le théorème de projection

1.10 Théorème de projection. *Soient H un espace hilbertien et C une partie convexe fermée non vide de H. Pour tout $x \in H$, il existe un et un seul point y_0 de C en lequel la fonction $y \mapsto \|y - x\|$ atteint son minimum. Pour tout $y \in C$, la partie réelle de $\langle x - y_0, y - y_0\rangle$ est négative.*

Démonstration. Notons $d = \inf\{\|x - y\|,\ y \in C\}$ la distance de x à C. Soient $y, z \in C$. Posons $b = x - \dfrac{1}{2}(y+z)$ et $c = \dfrac{1}{2}(y - z)$; alors $\|b\| \geqslant d$ vu que $\dfrac{1}{2}(y+z) \in C$; comme $x - y = b - c$ et $x - z = b + c$, on a

$$\|x-y\|^2 + \|x-z\|^2 = 2(\|b\|^2 + \|c\|^2) \geqslant 2d^2 + \frac{1}{2}\|y-z\|^2;$$

donc $\|y - z\|^2 \leqslant 2(\|x-y\|^2 - d^2) + 2(\|x-z\|^2 - d^2)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $C_n = \{y \in C;\ \|x-y\|^2 \leqslant d^2 + 1/n\}$. C'est une partie fermée non vide de H ; par ce qui précède le diamètre de C_n est inférieur ou égal à $2/\sqrt{n}$, donc tend vers 0. Comme H est complet, l'intersection des fermés emboités C_n qui est égale à $\{y \in C,\ \|x-y\| = d\}$, contient un et un seul point y_0.

Soit $y \in C$; pour $t \in [0,1]$, on a $y_0 + t(y - y_0) \in C$, donc $\|y_0 + t(y-y_0) - x\| \geqslant \|y_0 - x\|$. Posons $\varphi(t) = \|y_0 + t(y-y_0) - x\|^2 = \|y_0 - x\|^2 + 2t\mathrm{Re}(\langle y_0 - x, y - y_0\rangle) + t^2\|y - y_0\|^2$. Comme $\varphi(0) \leqslant \varphi(t)$ pour $t \in [0,1]$, la dérivée de φ en 0 est positive ou nulle, donc $\mathrm{Re}(\langle y_0 - x, y - y_0\rangle) \geqslant 0$. □

1.11 Proposition. *Soient H un espace hilbertien et E un sous-espace vectoriel fermé de H. On a $E \oplus E^\perp = H$.*

Démonstration. Si $x \in E \cap E^\perp$ alors $\langle x,x\rangle = 0$ donc $x = 0$. Soit $x \in H$ et notons $y_0 \in E$ le point en lequel la fonction $y \mapsto \|y - x\|$ atteint son minimum. Soit $y \in E$. Soit $u \in \mathbb{K}$. Alors $y_0 + uy \in E$, donc la partie réelle de $\langle y_0 - x, uy\rangle$ est négative ou nulle. Prenant $u = \langle y, y_0 - x\rangle$, on trouve $\overline{u}u \leqslant 0$, donc $u = 0$. Il s'ensuit que $x - y_0 \in E^\perp$, donc $x = y_0 + x - y_0 \in E \oplus E^\perp$. □

Si E est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace hilbertien H on appelle *projecteur orthogonal* sur E l'opérateur $P : H \to H$ tel que $P(x+y) = x$ pour tout $x \in E$ et $y \in E^\perp$. Pour tout $x \in E$ et $y \in E^\perp$ on a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \geqslant \|x\|^2 = \|P(x+y)\|^2$, donc $P \in \mathcal{L}(H,H)$ et $\|P\| \leqslant 1$.

1.12 Corollaire. *a) Soient H un espace hilbertien et A une partie de H ; alors $(A^\perp)^\perp$ est le plus petit sous-espace fermé de H contenant A.*

b) Si F est un sous espace de H, $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$.

Démonstration. a) Notons E le plus petit sous-espace fermé de H contenant A. Tout élément de A est orthogonal à $A^\perp$, donc $A \subset (A^\perp)^\perp$. Comme $(A^\perp)^\perp$ est un sous-espace fermé de H contenant A, on a $E \subset (A^\perp)^\perp$.

Soit $x \in (A^\perp)^\perp$. Ecrivons $x = y + z$ avec $y \in E$ et $z \in E^\perp$. Comme $E \subset (A^\perp)^\perp$, $z = x - y \in (A^\perp)^\perp$; comme $A \subset E$, on a $E^\perp \subset A^\perp$; comme $z \in (A^\perp)^\perp \cap A^\perp$, il s'ensuit que $\langle z, z\rangle = 0$, donc $z = 0$. On en déduit que $x = y \in E$.

b) découle de a), puisque le plus petit sous-espace fermé de H contenant F est $\overline{F}$. □

1.13 Proposition. *Soit H un espace hilbertien. L'application isométrique antilinéaire $x \mapsto f_x$ de la prop. 1.6 est une bijection de H sur H'.*

Démonstration. Soit $f \in H'$; notons E son noyau. Si $f \neq 0$, $E \neq H$ et $E^\perp$ n'est pas réduit à 0 par la prop. 1.11. Soit alors x un vecteur non nul de $E^\perp$. Comme $x \in E^\perp$, la forme f_x est nulle sur E. Comme $f_x(x) \neq 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda f_x(x)$. Comme E est un hyperplan et $x \notin E$, on a $H = E \oplus \mathbb{K}x$. Donc f et λf_x qui coïncident sur E et en x sont égales. Donc $f = f_{\overline{\lambda}x}$. □

1.14 Corollaire. *Tout espace hilbertien est réflexif.*

Démonstration. Soient H un espace hilbertien et $\ell \in H''$. L'application $x \mapsto \overline{\ell(f_x)}$ est une forme linéaire et continue sur H. Par la prop. 1.13, il existe $y \in H$ tel que, pour tout $x \in H$ on ait $\ell(f_x) = \overline{f_y(x)} = \langle y, x\rangle = f_x(y)$. Il résulte alors de la prop. 1.13 que, pour tout $f \in H'$, on a $\ell(f) = f(y)$, c'est à dire que ℓ est l'image de y par l'application canonique de H dans H''. □

1.4 Adjoint d'une application linéaire continue

1.15 Proposition. *Soient E et F des espaces hilbertiens et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Il existe un unique $T^* \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$ on ait $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$.*

Démonstration. Pour tout $y \in F$, l'application $x \mapsto \langle y, T(x)\rangle$ est linéaire et continue. Il existe donc un unique élément $T^*(y) \in E$ tel que pour tout $x \in E$ on ait $\langle y, T(x)\rangle = \langle T^*(y), x\rangle$. Pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto \langle x, T^*(y)\rangle = \langle T(x), y\rangle$ est linéaire d'où l'on déduit que T^* est linéaire.

Pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$ on a $|\langle x, T^*(y)\rangle| = \langle T(x), y\rangle| \leqslant \|T(x)\|\|y\| \leqslant \|T\|\|x\|\|y\|$; or, pour $y \in F$ on a (par la prop. 1.6) $\|T^*(y)\| = \sup\{\langle x, T^*(y)\rangle,\ x \in E,\ \|x\| \leqslant 1\}$; donc $\|T^*(y)\| \leqslant \|T\|\|y\|$. Donc T^* est continue et $\|T^*\| \leqslant \|T\|$. □

1.16 Définition. Soient E et F des espaces hilbertiens et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. L'unique $T^* \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$ on ait $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$ est appelé *adjoint* de T.

Regroupons dans la proposition suivante quelques propriétés des adjoints :

1.17 Proposition. *Soient E et F des espaces hilbertiens. L'application $T \mapsto T^*$ est antilinéaire et isométrique de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $\mathcal{L}(F, E)$; pour tout $T \in \mathcal{L}(E, F)$ on a $(T^*)^* = T$ et $\|T^* \circ T\| = \|T\|^2$. Pour tout espace hilbertien H tout $S \in \mathcal{L}(E, F)$ et tout $T \in \mathcal{L}(F, H)$ on a $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$).*

Démonstration. Montrons que $\|T^* \circ T\| = \|T\|^2$. On a $\|T^* \circ T\| \leqslant \|T^*\|\|T\| \leqslant \|T\|^2$. De plus, pour tout $x \in E$, $\|x\| \leqslant 1$ on a $\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \langle x, T^* \circ T(x)\rangle \leqslant \|T^* \circ T\|$ grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Donc $\|T\|^2 = \sup\{\|T(x)\|^2,\ x \in H,\ \|x\| \leqslant 1\} \leqslant \|T^* \circ T\|$.

Les autres propriétés sont laissées en exercice. □

1.18 Proposition. *Soient E et F des espaces hilbertiens et $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors* $\ker T^* = (T(E))^\perp$ *et l'adhérence de $T^*(F)$ est* $(\ker T)^\perp$.

Démonstration. Soit $y \in F$; alors $y \in \ker T^* \iff \forall x \in E,\ \langle T^*(y), x\rangle = 0 \iff y \in (T(E))^\perp$, d'où la première assertion. Il en résulte (par le cor. 1.12) que $\overline{T(E)} = (\ker T^*)^\perp$, d'où la deuxième assertion en remplaçant T par son adjoint. □

1.19 Définition. Soient E et F des espaces hilbertiens. Un élément $U \in \mathcal{L}(E,F)$ est appelé *unitaire* si $U^* \circ U = \mathrm{id}_E$ et $U \circ U^* = \mathrm{id}_F$. Un élément $T \in \mathcal{L}(E,E)$ est appelé *normal* si $T^* \circ T = T \circ T^*$, *autoadjoint* si $T = T^*$ et *positif* s'il est autoadjoint et, pour tout $x \in E$ on a $\langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R}_+$.

1.20 Exemple. Soit H un espace hilbertien Un projecteur est auto-adjoint si et seulement s'il est orthogonal. Dans ce cas il est positif.

En effet, soit $P \in \mathcal{L}(H)$ un projecteur ; notons E son image.

- Supposons que P est autoadjoint. Soient $x \in E$ et $y \in \ker P$. On a $\langle x, y\rangle = \langle P(x), y\rangle = \langle x, Py\rangle = 0$, donc $\ker P \subset E^\perp$. L'égalité s'en déduit puisque $H = E \oplus \ker P = E \oplus E^\perp$.
- Supposons que P est le projecteur orthogonal d'image E. Pour $x, x' \in E$ et $y, y' \in E^\perp$ on a $\langle P(x+y), x'+y'\rangle = \langle x, x'\rangle = \langle x+y, P(x'+y')\rangle$; donc $P = P^*$. De plus, $\langle P(x+y), x+y\rangle = \langle x, x\rangle \in \mathbb{R}_+$, donc P est positif.

1.21 Proposition. *Soient E et F des espaces hilbertiens et $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) T est unitaire.

(ii) T est surjectif et $T^* \circ T = id_E$.

(iii) T est une isométrie de E sur F.

Démonstration. Si T est unitaire, comme $T \circ T^* = \mathrm{id}_F$, il est surjectif, donc (i)⇒(ii).

Si $T^* \circ T = \mathrm{id}_E$, alors pour tout $x \in E$ on a $\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \langle x, T^*(T(x))\rangle = \|x\|^2$; donc (ii)⇒(iii).

Enfin, supposons que T est une isométrie de E sur F ; comme $(x,y) \mapsto \langle x, T^*(T(y))\rangle = \langle Tx, Ty\rangle$ est un produit scalaire sur E, il résulte de l'identité de polarisation (1.2) que, pour tout $x, y \in E$, on a $\langle x, T^*(T(y))\rangle = \langle x, y\rangle$. Donc $T^*(T(y)) - y \in E^\perp = \{0\}$. Donc $T^* \circ T = \mathrm{id}_E$. Comme par l'hypothèse (iii) T est bijective, $T^* = T^{-1}$, d'où (i). □

1.5 Topologies sur $\mathcal{L}(H)$

Soient X un ensemble, et $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Donnons-nous pour tout $i \in I$ une application $f_i : X \to E_i$. On peut munir alors X d'une topologie qui est la plus faible parmi celles rendant continues les applications f_i. Une partie V de X est un voisinage de $x \in X$ pour cette topologie si et seulement s'il existe une partie finie J de I et, pour tout $j \in J$ un voisinage U_j de $f_j(x)$ dans E_j tels que $\displaystyle\bigcap_{j\in J} f_j^{-1}(U_j) \subset V$.

Soit H un espace hilbertien.

Sur H, en plus de la topologie normique, on utilisera la topologie *faible* qui est la topologie la plus faible rendant continues les applications $f_y : x \mapsto \langle y, x\rangle$ (pour fout $y \in H$).

Dans le cas hilbertien, le théorème de projection implique le résultat suivant ([1]).

1. Ce résultat est vrai dans un espace normé quelconque - c'est une conséquence du théorème de séparation de Hahn-Banach

1.22 Proposition. *Toute partie convexe fermée de H est faiblement fermée.*

Démonstration. Soit C une partie convexe fermée non vide de H. Pour $x \in H$, notons $p_C(x)$ le point de C tel que $\|x - p_C(x)\| = \inf\{\|x - y\|;\ y \in C\}$. Alors, il résulte du théorème de projection que l'on a $C = \{y \in H;\ \forall x \in H,\ \mathrm{Re}\langle y - p_C(x), (x - p_C(x))\rangle \leqslant 0\}$; donc C est faiblement fermé. □

Sur $\mathcal{L}(H)$ en plus de la topologie normique, on utilisera les topologies suivantes.

- La topologie *forte*, qui est la topologie la plus faible rendant continues les applications $T \mapsto T(x)$ de $\mathcal{L}(H)$ dans H muni de la topologie normique (pour $x \in H$).
- La topologie *faible*, qui est la topologie la plus faible rendant continues les applications $T \mapsto T(x)$ de $\mathcal{L}(H)$ dans H muni de la topologie faible (pour $x \in H$). C'est la topologie la plus faible rendant continues les applications $T \mapsto \langle x, T(y)\rangle$ pour $x, y \in H$.
- La topologie $*$-*forte*, qui est la topologie la plus faible rendant continues les applications $T \mapsto T(x)$ et $T \mapsto T^*(x)$ de $\mathcal{L}(H)$ dans H muni de la topologie normique (pour $x \in H$).

2 Algèbres de Banach

Soient A une algèbre complexe unifère et $x \in A$. On sait définir $P(x)$ si P est un polynôme. Un des thèmes de la théorie spectrale des algèbres de Banach sera de construire $P(x)$ pour P de plus en plus général.

2.1 Préliminaires. Définition du spectre

Soit K un corps algébriquement clos.

2.1 Définition. Soit A une K-algèbre unifère. Notons 1 l'élément unité de A. Pour $\lambda \in K$ nous noterons encore λ l'élément $\lambda 1$ de A. On note A^{-1} l'ensemble des éléments inversibles de A. Soit x un élément de A. On appelle *spectre* de x dans A le sous-ensemble $\mathrm{Sp}_A x = \{\, \lambda \in K\,,\ (x - \lambda) \notin A^{-1}\}$ de K.

Commençons par un résultat simple :

2.2 Lemme. *Soit A une K-algèbre unifère.*

a) Soient $a, b \in A$ deux éléments permutables (i.e. tels que $ab = ba$). Alors ab est inversible si et seulement si a et b le sont.

b) Soient $P \in K[X]$ un polynôme non nul et $x \in A$. Alors $P(x)$ est inversible si et seulement si $\mathrm{Sp}_A(x)$ contient une racine de P.

Démonstration. a) Si a et b sont inversibles, il en va de même pour ab. Si $ab = ba$ est inversible, on a $a(b(ab)^{-1}) = 1 = ((ab)^{-1}b)a$ donc a est inversible à gauche et à droite.

b) On écrit $P = \alpha \displaystyle\prod_{j=1}^{k}(X - \lambda_j)$. Par (a), $P(x)$ est inversible si et seulement si $x - \lambda_j$ est inversible pour tout j. □

Si l'algèbre A n'est pas unifère, on peut la plonger dans une algèbre unifère $\tilde{A}$ qui comme K-espace vectoriel est isomorphe à $A \times K$ et dont la loi de produit est définie par : $(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$ (pour tout $a, b \in A, \lambda, \mu \in K$). L'élément $(0, 1)$ est l'élément unité de $\tilde{A}$. La formule $i(a) = (a, 0)$ définit un homomorphisme de A dans $\tilde{A}$. On identifie alors A avec son image dans $\tilde{A}$ de sorte que l'élément (a, λ) s'écrit $a + \lambda$. Enfin, on pose $\mathrm{Sp}'_A a = \mathrm{Sp}_{\tilde{A}} a$ pour tout élément a de A. Dans la suite on écrira souvent $\mathrm{Sp}_A a$ au lieu de $\mathrm{Sp}'_A a$.

Remarquons que, pour tout $a \in A\,,\ 0 \in \mathrm{Sp}'_A a$.

2.3 Remarque. Si l'algèbre A possède déjà un élément unité noté e, en posant $\pi(a, \lambda) = (a + \lambda e, \lambda)$ on obtient un isomorphisme π de $\tilde{A}$ sur l'algèbre produit $A \times K$. Pour $a \in A$ on a $\mathrm{Sp}'_A a = \mathrm{Sp}_A a \cup \{0\}$.

2.4 Proposition. *Soit $\pi : A \to B$ un morphisme d'algèbres unifères. Pour tout $x \in A$ on a $\mathrm{Sp}_B \pi(x) \subset \mathrm{Sp}_A x$.* □

2.5 Exemple. Notons $K(X)$ le corps des fractions rationnelles sur K. Pour $R \in K(X)$, notons $p(R)$ le sous-ensemble de K formé des pôles de R. Soit S une partie de K et posons $K(X)_S = \{\, R \in K(X)\,,\ p(R) \cap S = \emptyset\}$. Alors il est clair que $\mathrm{Sp}_{K(X)_S} X = S$.

Revenons au cas général. Soient $x \in A$ et $R \in K(X)$ sans pôles dans $\mathrm{Sp}_A x$; écrivons $R = P/Q$ où P et Q sont deux polynômes premiers entre eux. Alors $Q(x)$ est inversible et on peut former $R(x) = P(x)Q(x)^{-1}$. On a clairement :

2.6 Proposition. *a) L'application $R \mapsto R(x)$ est l'unique homomorphisme φ d'algèbres unifères de $K(X)_{\mathrm{Sp}_A x}$ dans A tel que $\varphi(X) = x$.*

b) Pour tout $P \in K(X)_{\mathrm{Sp}_A x}$, on a $P(\mathrm{Sp}_A x) \subset \mathrm{Sp}_A P(x)$ avec égalité sauf si $\mathrm{Sp}_A x = \emptyset$ et P est constant.

Démonstration. a) est clair.

b) Soit $\lambda\mathbb{C}$, alors il existe $Q \in K(X)_{\mathrm{Sp}_A x}$ tel que $P - P(\lambda) = (X - \lambda)Q$. Si $P(x) - P(\lambda)1$ est inversible, il en va de même pour $x - \lambda$. Il vient $P(\mathrm{Sp}_A x) \subset \mathrm{Sp}_A P(x)$.
Supposons que $P = S/T$ n'est pas un polynôme constant avec $S, T \in K[X]$ premiers entre eux. Soit $\lambda \in K$. Comme $T(x)$ est inversible, on a $\lambda \in \mathrm{Sp}_A P(x)$, si et seulement si $(S - \lambda T)(x)$ n'est pas inversible. D'après le lemme 2.2, cela a lieu si et seulement s'il existe $\mu \in \mathrm{Sp}_A x$ racine de $S - \lambda T$, c'est à dire tel que $P(\mu) = \lambda$. □

2.7 Lemme. *Soit A une anneau unifère et notons 1 son élément unité. Soient $x, y \in A$. Alors $1 - xy$ est inversible si et seulement si $1 - yx$ l'est.*

Démonstration. Si $1 - yx$ est inversible, $1 + x((1 - yx)^{-1})y$ est l'inverse de $1 - xy$. □

2.8 Proposition. *Pour tout couple (x, y) d'éléments de l'algèbre A on a $\mathrm{Sp}'_A xy = \mathrm{Sp}'_A yx$.* □

2.9 Remarque. Supposons que le corps K n'est pas algébriquement clos et soit k une clôture algébrique de K. Soit A une K-algèbre. En « étendant les scalaires » on définit une k-algèbre $A_k = A \otimes_K k$ dans laquelle A est naturellement plongée (par l'application $a \mapsto a \otimes 1$). Le spectre d'un élément x de A est alors par définition $\mathrm{Sp}_{A_k}(x \otimes 1)$.

2.2 Spectre d'un élément d'une algèbre de Banach

2.10 Notations.

- Soient E et F deux espaces normés. On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F. La norme d'opérateur de $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est $\|T\| = \sup\{\, \|Tx\|\,,\ x \in E\,,\ \|x\| \leqslant 1\,\}$. Rappelons que l'espace des applications linéaires continues d'un espace vectoriel normé E dans un espace de Banach F est un espace de Banach.
- Une algèbre de Banach (complexe) est un espace de Banach muni d'un produit $(x,y) \mapsto xy$ qui en fait une algèbre complexe et tel que, pour tout $x, y \in A$ on ait $\|xy\| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ (où $\|\ \|$ désigne la norme de A). Si A est unifère on suppose de plus que $\|1\| = 1$. Soit E un espace de Banach. L'algèbre $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$ munie de la norme des opérateurs est une algèbre de Banach.
- Si l'algèbre A n'est pas unifère, l'algèbre unifère $\tilde{A}$ (*cf.* §1) admet une structure d'algèbre de Banach dont la norme est définie par : $\|(a,\lambda)\| = \|a\| + |\lambda|$ (pour $a \in A\,,\ \lambda \in \mathbb{C}$).
- Soit A un espace de Banach muni d'un produit continu qui en fait une algèbre complexe unifère. On peut remplacer la norme de A par une norme équivalente de manière à avoir $\|xy\| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ et $\|1\| = 1$. En effet, pour $a \in A$ définissons $L_a \in \mathcal{L}(A)$ par la formule $L_a(x) = ax$. L'application $a \mapsto L_a$ est un morphisme continu d'algèbres. La norme d'opérateur de L_a est supérieure ou égale à $\dfrac{\|a\|}{\|1\|}$. Donc l'application qui à $a \in A$ associe la norme d'opérateur de L_a est une norme équivalente à $\|\ \|$.

Nous utiliserons le lemme suivant :

2.11 Lemme. *Soient A une algèbre de Banach unifère.*

a) Soit a de A tel que $\|a\| < 1$. Alors $1-a$ est inversible et son inverse est limite de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a^n$.

b) Pour tout $x \in A$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\|x\| < |\lambda|$, on a $\lambda \notin \mathrm{Sp}_A x$ et $\lim_{\lambda\to\infty} \|\lambda(\lambda - x)^{-1} - 1\| = 0$.

Démonstration. a) Comme $\|a^n\| \leqslant \|a\|^n$ la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a^n$ converge. On a

$$a\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a^n\right) a = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n\,,$$

d'où a).

b) Posons $a = x\lambda^{-1}$. Par a) $1-a$ est inversible, donc $\lambda - x$ est inversible et $\lambda(\lambda-x)^{-1} = (1-a)^{-1}$; or $\|(1-a)^{-1} - 1\| = \left\|\sum_{n=1}^{+\infty} a^n\right\| \leqslant \dfrac{\|a\|}{1-\|a\|}$ d'où b). □

Il résulte de ce lemme :

2.12 Proposition. *L'ensemble des éléments inversibles A^{-1} d'une algèbre de Banach unifère A est ouvert et l'application $\varphi : x \mapsto x^{-1}$ est continument différentiable sur A^{-1} ; sa différentielle en $x \in A^{-1}$ est $(D\varphi)_x : h \mapsto -x^{-1}hx^{-1}$.*

Démonstration. Soient $x \in A^{-1}$ et $h \in A$ tels que $\|h\| < \|x^{-1}\|^{-1}$. Posons $a = -hx^{-1}$; alors $1-a$ est inversible par le lemme 2.11.a), donc $x + h = (1-a)x$ est inversible et $(x+h)^{-1} = x^{-1}(1-a)^{-1} = x^{-1}\sum_{n\in\mathbb{N}} a^n$ donc

$$\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| = \left\|x^{-1}\sum_{n=2}^{+\infty} a^n\right\| \leqslant \frac{\|x^{-1}\|^3\|h\|^2}{1 - \|x^{-1}\|\|h\|}$$

d'où le résultat. □

2.13 Proposition. *Soit A une algèbre de Banach unifère non nulle. Le spectre de tout élément x de A est une partie compacte non vide de $\mathbb{C}$ et l'application $z \mapsto (x-z)^{-1}$ est holomorphe de $\mathbb{C} - \mathrm{Sp}_A x$ dans A.*

Démonstration. L'application $\lambda \mapsto (\lambda - x)$ est continue donc l'image inverse de A^{-1} est ouverte (prop 2.12). Donc $\mathrm{Sp}_A x$ est fermé dans $\mathbb{C}$. Comme $\mathrm{Sp}_A x$ est borné (lemme 2.11.b), c'est un compact de $\mathbb{C}$. Posons $U = \mathbb{C} - \mathrm{Sp}_A x$.

Par la prop. 2.12, pour toute forme linéaire continue ℓ sur A, l'application $z \mapsto \ell((x-z)^{-1})$ est une fonction holomorphe dans U. Si $\mathrm{Sp}_A x$ était vide, cette fonction serait entière ; or quand $z \to \infty$, $\ell((x-z)^{-1})$ tend vers 0 (lemme 2.11.b). Par le théorème de Liouville on aurait $\ell((x-z)^{-1}) = 0$ pour tout z ; ceci ayant lieu pour tout ℓ, on aurait $(x-z)^{-1} = 0$, ce qui est absurde, d'où la proposition. □

Une conséquence directe de cette proposition est :

2.14 Théorème de Gel'fand-Mazur. *Soit A une algèbre de Banach. Si A est un corps alors $A = \mathbb{C}$.*

Démonstration. Montrons que l'application $i : \mathbb{C} \to A$ telle que $i(\lambda) = \lambda 1$ est surjective. Soit $x \in A$; comme $\mathrm{Sp}_A x$ n'est pas vide il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $i(\lambda) - x$ ne soit pas inversible ; si A est un corps on a alors $i(\lambda) = x$. □

2.3 Transformation de Gel'fand

2.15 Définition. Soit A une algèbre de Banach. On appelle *caractère* de A tout homomorphisme d'algèbres continu et non nul de A dans $\mathbb{C}$.

Rappelons qu'un idéal à gauche (*resp.* à droite, bilatère) I d'un anneau A est dit *maximal* si $I \neq A$ et si les seuls idéaux à gauche (*resp.* à droite, bilatères) de A contenant I sont A et I.

2.16 Lemme. *Tout idéal maximal d'une algèbre de Banach unifère est fermé.*

Démonstration. Soit I un idéal de l'algèbre de Banach A, distinct de A et notons $\overline{I}$ son adhérence. Comme $I \cap A^{-1} = \emptyset$ et que A^{-1} est ouvert, on a $\overline{I} \cap A^{-1} = \emptyset$ et $\overline{I} \neq A$. Si I est maximal, comme $I \subset \overline{I}$, on a nécessairement $I = \overline{I}$ et I est fermé. □

Rappelons qu'un idéal I d'un anneau commutatif A est maximal si et seulement si l'anneau A/I est un corps. D'après le lemme précédent et le théorème de Gel'fand-Mazur, il y a correspondance bijective entre idéaux maximaux d'une algèbre de Banach commutative et caractères : le noyau d'un caractère est un idéal maximal ; le quotient de A par un idéal maximal est une algèbre de Banach (lemme 2.16) et un corps donc est canoniquement isomorphe à $\mathbb{C}$.

2.17 Définition. On appelle *spectre* d'une algèbre de Banach commutative A et on note $\mathrm{Sp}\, A$ l'ensemble de ses caractères. On munit $\mathrm{Sp}\, A$ de la topologie de le convergence simple.

Autrement dit la topologie de $\mathrm{Sp}\, A$ est la topologie la moins fine pour laquelle les applications $\chi \mapsto \chi(x)$ de $\mathrm{Sp}\, A$ dans $\mathbb{C}$ sont continues (pour tout $x \in A$).

Si A est une algèbre de Banach commutative et non unifère, le spectre de A est la partie du spectre de $\tilde{A}$ formée des caractères qui ne sont pas nuls sur A.

2.18 Proposition. *Soit A une algèbre de Banach commutative et unifère.*

a) Pour $x \in A$ on a : $\mathrm{Sp}_A x = \{ \chi(x)\,;\ \chi \in \mathrm{Sp}\, A \}$.

b) Le spectre de A est compact.

c) Pour $x \in A$ et $\chi \in \mathrm{Sp}\, A$ on pose $G(x)(\chi) = \chi(x)$. L'application G est un morphisme continu d'algèbres de A dans $C(\mathrm{Sp}\, A)$.

Démonstration. a) Soit $x \in A$. Pour tout $\chi \in \mathrm{Sp}\, A$, $x - \chi(x)$ appartient au noyau du caractère χ et donc n'est pas inversible. Il s'ensuit que $\chi(x) \in \mathrm{Sp}_A x$. Réciproquement, soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_A x$. L'idéal $(x - \lambda)A$ est alors distinct de A. Soit J un idéal maximal contenant $(x - \lambda)A$ (lemme de Zorn) et χ le caractère de noyau J. On a $\chi(x - \lambda) = 0$ donc $\chi(x) = \lambda$.

b) Il résulte de a) et du lemme 2.11.b) que pour tout $\chi \in \mathrm{Sp}\, A$ et $x \in A$ on a $|\chi(x)| \leqslant \|x\|$. Il s'ensuit que $\mathrm{Sp}\, A$ est inclus dans la boule unité de l'espace de Banach A' dual (topologique) de A. Or la boule unité du dual d'un espace de Banach E est compacte pour la topologie de la convergence simple $\sigma(E', E)$. Comme $\mathrm{Sp}\, A$ est l'intersection des parties fermées $B_{x,y} = \{ \ell \in A'\,,\ \ell(xy) = \ell(x)\ell(y) \}$ pour x et y parcourant A et de $\{ \ell \in A'\,,\ \ell(1) = 1 \}$, $\mathrm{Sp}\, A$ est compact.

c) Par définition de la topologie de $\mathrm{Sp}\, A$ les applications $G(x)$ sont continues. De plus, pour tout $x, y \in A$ et tout $\chi \in \mathrm{Sp}\, A$ on a $G(xy)(\chi) = \chi(xy) = \chi(x)\chi(y) = (G(x)G(y))(\chi)$ donc $G(xy) = G(x)G(y)$; de même $G(x + y) = G(x) + G(y)$, d'où la proposition. □

2.19 Définition. L'application $G : A \to C(\mathrm{Sp}\, A)$ décrite dans la proposition 2.18.c) s'appelle la *transformation de Gel'fand* de A.

2.20 Remarque. Soit A une algèbre de Banach non unifère et $\chi : A \to \mathbb{C}$ un morphisme d'algèbres. On peut bien étendre χ à un morphisme d'algèbres $\tilde{\chi} : \tilde{A} \to \mathbb{C}$ en posant $\tilde{\chi}(x + \lambda) = \chi(x) + \lambda$ (pour tout $x \in A\,,\ \lambda \in \mathbb{C}$) donc χ est continu.

2.21 Proposition. *Soient a et b deux éléments permutables de A. Alors $\mathrm{Sp}_A a + b \subset \mathrm{Sp}_A a + \mathrm{Sp}_A b$ et $\mathrm{Sp}_A ab \subset (\mathrm{Sp}_A a)(\mathrm{Sp}_A b)$.*

Démonstration. Soit B la plus petite sous-algèbre fermée de A contenant $a\,,\ b$ ainsi que $\{ (a-\lambda)^{-1}\,,\ \lambda \notin \mathrm{Sp}_A a \} \cup \{ (b - \lambda)^{-1}\,,\ \lambda \notin \mathrm{Sp}_A b \}$. Alors B est commutative et il est clair que $\mathrm{Sp}_B a = \mathrm{Sp}_A a$ et $\mathrm{Sp}_B b = \mathrm{Sp}_A b$. Comme $\mathrm{Sp}_A a + b \subset \mathrm{Sp}_B a + b$ et $\mathrm{Sp}_A ab \subset \mathrm{Sp}_B ab$, il suffit d'établir la proposition en supposant A commutative. Si A est commutative, pour tout $\chi \in \mathrm{Sp}\, A$ on a $\chi(a+b) = \chi(a)+\chi(b)$ et $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$ donc la proposition découle de la prop. 2.18 a). □

2.22 Exemple. Soient a et b deux éléments d'une algèbre de Banach A tels que $\mathrm{Sp}_A a \cap \mathrm{Sp}_A b = \emptyset$. L'application $x \mapsto ax - xb$ est inversible dans l'algèbre de Banach $\mathcal{L}(A)$ des applications linéaires continues de l'espace de Banach A dans lui même.

2.23 Remarques. a) Soit A une algèbre de Banach commutative non nécessairement unifère. Le spectre de A est localement compact et séparé et son compactifié d'Alexandroff est le spectre de $\tilde{A}$.

b) « Naturalité » de la transformation de Gel'fand : Soit $\pi : A \to B$ un homomorphisme continu unital (ie. tel que que $\pi(1) = 1$) d'algèbres de Banach unifères. Si χ est un caractère sur B, $\chi \circ \pi$ est un caractère sur A et l'application $\pi^* : \chi \mapsto \chi \circ \pi$ est une application continue du spectre de B dans celui de A. On obtient alors un homomorphisme $\pi_* : C(\mathrm{Sp}\, A \to C(\mathrm{Sp}\, B)$ en posant $\pi_*(f) = f \circ \pi^*$. Appelons G_A et G_B les transformations de Gel'fand de A et B respectivement. On a $\pi_* \circ G_A = G_B \circ \pi$.

2.24 Exemples. a) Le spectre de $C(X)$ est X et sa transformation de Gel'fand est l'identité de $C(X)$. En effet, l'évaluation en un point x de X est un caractère dont le noyau est $J_x = \{ f \in C(X)\,;\ f(x) = 0 \}$. On obtient ainsi une application clairement continue de X dans $\operatorname{Sp} C(X)$. Cette application est injective car les fonctions continues séparent les points de X (les espaces compacts sont *normaux*). Montrons qu'elle est surjective : soit J un idéal de $C(X)$. Pour $f \in J$ posons $U_f = \{ x \in X\ ,\ f(x) \neq 0 \}$. Si les U_f recouvrent X, il existe une partie finie T de J telle que les $U_f\ ,\ f \in T$ recouvrent X (par compacité de X). Posons alors $h = \sum_{f \in T} |f|^2 \in J$. On a $U_h = X$ donc h est inversible dans $C(X)$ et $J = C(X)$. Si $J \neq C(X)$, il existe donc x tel que $J \subset J_x$. En particulier les idéaux maximaux de $C(X)$ sont les J_x.

b) Soient A une algèbre de Banach et x un élément de A. On dit que A est rationnellement engendrée par x si la plus petite sous-algèbre fermée de A contenant x et $\{ (x - \lambda)^{-1}\ ,\ \lambda \in \mathbb{C} - \operatorname{Sp}_A x \}$ est A. Alors A est commutative et un caractère de A est déterminé par sa valeur en x. L'application $\chi \mapsto \chi(x)$ est donc injective et, comme $\operatorname{Sp} A$ est compact, c'est un homéomorphisme de $\operatorname{Sp} A$ sur $\operatorname{Sp}_A x$.

c) En particulier, soit X une partie compacte de $\mathbb{C}$. On note R_X l'algèbre des fonctions rationnelles de pôles hors de X et $A = C_h(X)$ l'adhérence de son image dans $C(X)$. Pour connaitre un caractère χ de $C_h(X)$, il suffit donc de connaitre la valeur $\chi(z)$ où z est la fonction identique sur X. Or il est clair que $\operatorname{Sp}_A z = X$: chaque point de X définit un caractère de $C_h(X)$; si $\lambda \notin X\ ,\ (z - \lambda)^{-1} \in R_X \subset C_h(X)$. Donc le spectre de $C_h(X)$ est X. L'inclusion de $C_h(X)$ dans $C(X)$ est la transformation de Gel'fand de X. En général $C_h(X)$ est distinct de $C(X)$ puisque la formule de Cauchy montre que l'application qui à f associe sa dérivée en un point intérieur de X est continue ; donc $C_h(X)$ est formée de fonctions holomorphes à l'intérieur de X.

d) Soit E un espace de Banach. Considérons E comme algèbre de Banach en posant $xy = 0$ pour tout $x, y \in E$. L'algèbre de Banach E est commutative et son spectre est vide. La transformation de Gel'fand est alors l'application $G : E \to 0$.

Les exemples ci-dessus montrent que la transformation de Gel'fand n'est en général ni surjective (exemple c) ni injective (exemple d).

2.4 Calcul fonctionnel holomorphe

Reprenons les notations de l'exemple 2.24.c). Soit X une partie compacte de $\mathbb{C}$. Notons $\operatorname{Hol}(X)$ l'algèbre des germes au voisinage de X de fonctions holomorphes à valeurs dans $\mathbb{C}$; si Y est un voisinage compact de X notons $i_{X,Y} : C_h(Y) \to \operatorname{Hol}(X)$ l'application qui à une fonction de $C_h(Y)$ associe son germe au voisinage de X.

2.25 Théorème. *Soient A une algèbre de Banach unifère, x un élément de A. Il existe un unique homomorphisme d'algèbres unifères $\Phi_x : \operatorname{Hol}(\operatorname{Sp}_A x) \to A$ tel que :*

a) $\Phi_x(z) = x$ où z désigne le germe de la fonction identique $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

b) Pour tout voisinage compact Y de $\operatorname{Sp}_A x$, la composée $\Phi_x \circ i_{\operatorname{Sp}_A x, Y}$ est continue.

Fixons A et x ; posons $X = \operatorname{Sp}_A x$. Soit $\Phi_x : \operatorname{Hol}(X) \to A$ un homomorphisme d'algèbres vérifiant la condition a) du théorème ; si g est le germe d'une fonction rationnelle f sans pôle dans X, on a $\Phi_x(g) = f(x)$. Le théorème 2.25 résulte donc immédiatement de l'énoncé suivant :

2.26 Proposition. *a) Pour tout voisinage compact Y de X l'application qui à $P \in R_Y$ associe $P(x)$ est continue pour la norme de la convergence uniforme sur Y.*

b) Il existe une suite décroissante (Y_n) de voisinages compacts de X tels qu'on ait

$$\mathrm{Hol}(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} i_{X,Y_n} C_h(Y_n)$$

Nous démontrons cette proposition en nous basant sur le lemme suivant :

2.27 Lemme. *Soit φ une fonction de classe C^1 à support compact dans $\mathbb{C}$ égale à 1 dans un voisinage ouvert U de X. Notons K le support de φ.*

a) Pour toute fonction rationnelle P sans pôle dans K on a :

$$P(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_K P(z)(z-x)^{-1} dz \wedge d\varphi$$

b) Pour toute fonction holomorphe f au voisinage de K et tout point λ de U on a :

$$f(\lambda) = \frac{1}{2i\pi}\int_K \frac{f(z)}{z-\lambda} dz \wedge d\varphi$$

Notons que $d\varphi$ étant nulle sur U les intégrales ci-dessus sont prises en fait sur $K - U$ (et ont donc un sens).

Démonstration. a) Traitons d'abord le cas $P = 1$. Soient φ et ψ deux fonctions de classe C^1 à support compact sur $\mathbb{C}$ égales à 1au voisinage de X ; définissons la forme ω nulle au voisinage de X et telle que $\omega(z) = (\varphi(z) - \psi(z))(z-x)^{-1}dz$ pour $z \notin X$. La forme $(z-x)^{-1}dz$ étant fermée sur $\mathbb{C} - X$, on a $d\omega = (z-x)^{-1}dz \wedge d\psi - (z-x)^{-1}dz \wedge d\varphi$. Comme $\int_{\mathbb{C}} d\omega = 0$ on a $\int_{\mathbb{C}} (z-x)^{-1}dz \wedge d\psi = \int_{\mathbb{C}} (z-x)^{-1}dz \wedge d\varphi$. Soit alors ψ une fonction de la forme $\psi(z) = g(|z|)$ où $g(t) = 1$ pour $t \leqslant R$, $g(t) = 0$ pour $t \geqslant R+2$ et $|g'(t)| \leqslant 1$ pour tout t. Faisant tendre R vers $+\infty$ on en déduit (lemme 2.11.c) que $\int_{\mathbb{C}} (z-x)^{-1}dz \wedge d\psi = \int_{\mathbb{C}} z^{-1}dz \wedge d\psi = \int_{\mathbb{C}} id\theta \wedge g'(r)dr = 2i\pi$. Soient S et T deux polynômes tels que T n'a pas de zéros dans K et posons $P = ST^{-1}$. Soit Q la fraction rationnelle à deux variables $Q(y,z) = (P(y) - P(z))(y-z)^{-1}$. Alors $T(y)Q(y,z)T(z) = (S(y) - S(z))(y-z)^{-1}T(z) + (T(z) - T(y))(y-z)^{-1}S(z)$ est un polynôme. Considérons la forme ω nulle hors de K et telle que pour $z \in K$ on ait $\omega(z) = \frac{1}{2i\pi}\varphi(z)Q(z,x)dz$. Comme $\int_{\mathbb{C}} d\omega = 0$ on trouve :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_K P(z)(z-x)^{-1}dz \wedge d\varphi = \frac{1}{2i\pi}\int_K P(x)(z-x)^{-1}dz \wedge d\varphi = P(x)$$

b) Pour f rationnelle c'est un cas particulier de a) (en prenant $A = \mathbb{C}$ et $x = \lambda$). Si $f(\lambda) = 0$, on pose $\omega(z) = \varphi(z)f(z)(z-\lambda)^{-1}dz$ pour $z \in K$. Alors $\int_{\mathbb{C}} d\omega = 0$. □

Etablissons à présent la proposition 2.26 : a) Résulte du lemme 2.27.a), l'application $P \mapsto \frac{1}{2i\pi}\int_K P(z)(z-x)^{-1}d\varphi \wedge dz$ étant continue.

b) Posons $Y_n = \{z \in \mathbb{C}\,,\ d(z,X) \leqslant 1/n\}$. Soit f une fonction holomorphe définie sur un voisinage ouvert V de X. Il existe n tel que $Y_n \subset V$. Soit φ une fonction de classe C^1 de support compact dans V et égale à 1 au voisinage de Y_n. Pour $z \in V - Y_n$, notons $h_z \in C_h(Y_n)$ la fonction $\lambda \mapsto (z-\lambda)^{-1}$. Il résulte du lemme 2.27.b) que la restriction de f à Y_n est $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_K f(z) h_z\, dz \wedge d\varphi$, donc cette restriction appartient à $C_h(Y_n)$. □

Notation : On posera pour tout $f \in \mathrm{Hol}(\mathrm{Sp}_A x)\,,\ f(x) = \Phi_x(f)$. Cette notation est justifié par le cas où f est le germe d'une fonction rationnelle. Si f est une fonction holomorphe au voisinage de $\mathrm{Sp}_A x$, on écrira souvent $f(x)$ au lieu de $g(x)$ où $g \in \mathrm{Hol}(\mathrm{Sp}_A x)$ désigne le germe de f.

2.28 Remarque. Soit U un voisinage ouvert de $\mathrm{Sp}_A x$ et γ un cycle tracé dans $U - \mathrm{Sp}_A x$ tel que $I_\gamma(z) = 1$ si $z \in \mathrm{Sp}_A x$ et $I_\gamma(z) = 0$ si $z \notin U$ (ici $I_\gamma(z) = (2i\pi)^{-1}\displaystyle\int_\gamma (z'-z)^{-1} dz'$ est l'indice de γ autour de z). On montre facilement que pour toute fonction holomorphe f sur U on a $f(x) = (2i\pi)^{-1}\displaystyle\int_\gamma f(z)(z-x)^{-1} dz$.

2.29 Proposition. *a) Soient x un élément d'une algèbre de Banach unifère A et $g \in \mathrm{Hol}(\mathrm{Sp}_A x)$. On a $\mathrm{Sp}_A g(x) = g(\mathrm{Sp}_A x)$ et pour tout $g' \in \mathrm{Hol}(\mathrm{Sp}_A g(x))$ on a $(g' \circ g)(x) = g'(g(x))$.*

b) Soient $\pi : A \to B$ un homomorphisme continu unital d'algèbres de Banach unifères, $x \in A$ et $g \in \mathrm{Hol}(\mathrm{Sp}_A x)$. Alors $g(\pi(x)) = \pi(g(x))$.

Démonstration. a) Soit f une fonction holomorphe définie dans un voisinage U du spectre de x. Si $\lambda \notin f(\mathrm{Sp}_A x)$ la fonction $z \mapsto (\lambda - f(z))^{-1}$ est holomorphe au voisinage du spectre de x et donc $\lambda \notin \mathrm{Sp}_A g(x)$ où g désigne le germe de f au voisinage de $\mathrm{Sp}_A x$. Soit $\mu \in \mathrm{Sp}_A x$ et soit h la fonction holomorphe sur U telle que pour tout $z \neq m$ on ait $f(z) - f(\mu) = h(z)(z-\mu)$. Si $f(x) - f(\mu)$ était inversible d'inverse $y \in A$ on aurait $(x-\mu)h(x)y = yh(x)(x-\mu) = 1$ et $x - \mu$ serait inversible à gauche et à droite donc inversible, ce qui est absurde. Donc $f(\mu) \in \mathrm{Sp}_A f(x)$. De plus, l'application $g' \mapsto (g' \circ g)(x)$ est un homomorphisme de $\mathrm{Hol}(\mathrm{Sp}_A g(x))$ dans A et coïncide avec $g' \mapsto g'(g(x))$ par le théorème 2.25.

b) Soient $x \in A$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $x - \lambda$ est inversible dans A alors $\pi(x) - \lambda$ est inversible dans B et son inverse est $\pi((x-\lambda)^{-1})$. Donc $\mathrm{Sp}_B \pi(x) \subset \mathrm{Sp}_A x$. Donc $g(\pi(x))$ a un sens. L'assertion b) est claire si g est le germe d'une fonction rationnelle et donc pour tout g par la proposition 2.26. □

2.30 Proposition. *Soit x un élément d'une algèbre de Banach A. La suite $\|x^n\|^{1/n}$ converge et sa limite est égale à* $\sup\{\,|\lambda|\,,\ \lambda \in \mathrm{Sp}_A x\,\}$.

La première assertion résulte du lemme élémentaire suivant (en posant $u_n = \log(\|x^n\|^{1/n})$) :

2.31 Lemme. *Soit u_n une suite de nombres dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ telle que pour tout n et p on ait $(n+p)u_{n+p} \leqslant nu_n + pu_p$. Alors la suite u_n converge vers* $\inf\{\,u_n\,,\ n \geqslant 1\,\}$.

Démonstration. Soit $m \geqslant 1$. Par recurrence sur $k \geqslant 1$ on a $u_{km} \leqslant u_m$. Pour $n = km + r$ avec $0 \leqslant r < m$ on a $u_n \leqslant n^{-1}(kmu_m + ru_1) = u_m + r/n(u_1 - u_m)$ donc $\limsup u_n \leqslant u_m$. □

Fin de la démonstration de la proposition 2.30. Posons $r = \sup\{\,|\lambda|\,,\ \lambda \in \mathrm{Sp}_A x\,\}$ et $\rho = \lim(\|x^n\|^{1/n})$. Pour $|\lambda| > \rho$ la série $\sum (x/\lambda)^n$ converge donc $1 - x/\lambda$ est inversible. Il en résulte que $r \leqslant \rho$.

Soit R un nombre réel tel que $R > r$, et φ une fonction de casse C^1 sur $\mathbb{C}$ égale à 1 au voisinage du spectre de x et telle que $\varphi(z) = 0$ si $|z| \geqslant R$. On a $x^n = (2i\pi)^{-1}\displaystyle\int z^n (z-x)^{-1}\, dz \wedge df$ donc $\|x^n\| \leqslant kR^n$ où k est une constante ; donc $R \geqslant r$; donc $\rho \leqslant r$. □

2.32 Définition. Pour $x \in A$ on pose $\rho(x) = \sup\{\,|\lambda|\,,\ \lambda \in \mathrm{Sp}_A x\,\}$. Ce nombre s'appelle le *rayon spectral* de x.

2.5 Appendice : Formes différentielles sur $\mathbb{C}$

Produit extérieur : Soient E et F deux espaces vectoriels (réels) ; on note $\Lambda^k(E;F)$ l'espace vectoriel des applications multilinéaires alternées de E^k dans F ; il est naturel de poser $\Lambda^0(E;F) = F$. Pour $\alpha \in \Lambda^k(E;\mathbb{R})$ et $\beta \in F$ on définit $\alpha\beta \in \Lambda^k(E;F)$ en posant $(\alpha\beta)(x_1,\ldots,x_k) = \alpha(x_1,\ldots,x_k)\beta$; pour $\alpha \in \Lambda^1(E;\mathbb{R})$ et $\beta \in \Lambda^1(E;F)$ on définit $\alpha\wedge\beta \in \Lambda^2(E;F)$ en posant $(\alpha\wedge\beta)(x,y) = \alpha(x)\beta(y) - \alpha(y)\beta(x)$. La même formule définit le produit $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^2(E;F)$ pour $\alpha \in \Lambda^1(E;\mathbb{C})$ et $\beta \in \Lambda^1(E;F)$ si Fest un espace vectoriel complexe. Plus généralement, pour $\alpha \in \Lambda^j(E;\mathbb{R})$ et $\beta \in \Lambda^k(E;F)$ on pose

$$(\alpha \wedge \beta)(x_1,\ldots,x_{j+k}) = \frac{1}{j!k!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{j+k}} \varepsilon_\sigma \alpha(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(j)})\beta(x_{\sigma(j+1)},\ldots,x_{\sigma(j+k)})$$

(mais cette formule ne nous servira pas puisque pour nous E sera de dimension 2, donc $\Lambda^k(E;F) = 0$ pour $k > 2$).

Formes différentielles : Soient W un ouvert de $\mathbb{R}^n$, E un espace de Banach réel et k un nombre entier. Une *k-forme différentielle sur W à coefficients dans E* est une application de W dans $\Lambda^k(\mathbb{R}^n;E)$. Comme $\Lambda^k(\mathbb{R}^n;E)$ est un espace de Banach (isomorphe à $E^{C_n^k}$), on peut parler d'une k-forme continue, de classe C^r... Soient α une j-forme sur W à coefficients dans $\mathbb{R}$ et β une k-forme sur W à coefficients dans E. On note $\alpha \wedge \beta$ la $j+k$-forme qui à $x \in W$ associe $\alpha(x) \wedge \beta(x)$.

Exemple : Une 0-forme, est une application de W dans E. Soit $f : W \to E$ une application de classe C^1 ; la différentielle df de f est une 1-forme différentielle sur W à coefficients dans E. Notons $x_1,\ldots,x_n$ les fonctions coordonnées de $\mathbb{R}^n$. Alors x_i est une fonction sur $\mathbb{R}^n$, donc dx_i est une 1-forme sur $\mathbb{R}^n$: c'est l'application qui à tout point de $\mathbb{R}^n$ associe l'application linéaire x_i. Toute 1-forme s'écrit alors $\alpha = \sum_i dx_i\, f_i$ où f_i est une 0-forme.

La différentielle extérieure :

2.33 Proposition. *Il existe une unique extension de d en une application qui à une k-forme différentielle ω de classe C^1 associe une $k+1$-forme continue et telle que :*

a) Pour toute j-forme α sur W à coefficients dans $\mathbb{R}$ et toute k-forme β sur W à coefficients dans E on a $d(\alpha\wedge\beta) = (d\alpha)\wedge\beta + (-1)^j\alpha\wedge d\beta$.

b) Pour toute k-forme α sur W à coefficients dans E de classe C^2, la forme $d\alpha$ est de classe C^1 et on a $d(d\alpha) = 0$.

Démonstration. Soit I un sous-ensemble de $\{1,\ldots,n\}$. Posons $\phi_I = dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}$ où $i_1 < \ldots < i_k$ sont les éléments de I (cette notation n'est pas « canonique »). Toute k-forme s'écrit de manière unique sous la forme d'une somme de termes $\phi_I f$ où I parcourt l'ensemble des sous-ensembles de $\{1,\ldots,n\}$ à k éléments et f est une 0-forme. Or par a) et b) $d(\phi_I) = 0$ donc $d(\phi_I f) = (-1)^k\phi_I\wedge df$, d'où l'unicité. Définissons donc d par la formule $d(\phi_I f) = (-1)^k\phi_I\wedge df$; on doit alors calculer $d(\phi_I f\wedge\phi_J g)$ qui se ramène immédiatement à la formule de Leibniz $d(fg) = (df)g + fdg$! Quant à b), en utilisant a) on se ramène au cas des 0-formes. Dans ce cas c'est juste la formule de Schwartz $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$. □

L'application d ainsi étendue s'appelle la *différentielle extérieure.*

2.34 Remarque. La seule chose qui nous intéresse ici est la partie existence de cette proposition. La partie unicité n'a un sens précis que dans le cas des formes à coefficients réels.

Intégrale d'une forme volume : Une forme volume sur un ouvert W de $\mathbb{R}^n$ à coefficients dans E est une n-forme différentielle sur W à coefficients dans E. Une forme volume s'écrit sous la forme $\omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n f$ où f est une 0-forme. Si f est intégrable (dans ce qui nous intéresse, continue à support compact), on définit $\displaystyle\int_W dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n f$ comme l'intégrale de Lebesgue de f sur W.

2.35 Proposition. *Soit ω une $n-1$-forme de classe C^1 à support compact sur W à valeurs dans un espace de Banach E. On a alors $\displaystyle\int_W d\omega = 0$.*

Démonstration. Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$ posons $I_k = \{1, \ldots, n\} - \{k\}$. Il existe des fonctions f_k de classe C^1 à support compact telles que $\omega = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \phi_{I_k} f_k$ alors $d\omega = \phi_{\{1,\ldots,n\}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}$. Or pour tout k on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}\, dx_k = 0$. □

La forme dz : On s'intéresse ici à des formes sur un ouvert de $\mathbb{C}$ identifié à $\mathbb{R}^2$. On note z l'application identité de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et x et y les parties réelle et imaginaire de z, de sorte que dz est une 1-forme différentielle sur $\mathbb{C}$ à coefficients dans $\mathbb{C}$; on a $dz = dx + idy$. Soit E un espace de Banach complexe ; remarquons qu'une application f de classe C^1 d'un ouvert W de $\mathbb{C}$ dans E est holomorphe si et seulement si $d(dzf) = 0$.

3 C*-algèbres

3.1 Définitions, calcul fonctionnel continu

3.1 Définition. Une *involution* d'une algèbre de Banach A est une application $x \mapsto x^*$ de A dans A involutive, antilinéaire, antimultiplicative et isométrique. Autrement dit, pour tout $x, y \in A$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a : $(x^*)^* = x$; $(x+y)^* = x^* + y^*$, $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$; $(xy)^* = y^* x^*$ et $\|x^*\| = \|x\|$. On dit qu'une algèbre de Banach est *involutive* si elle est munie d'une involution. Une *C^*-algèbre* est une algèbre de Banach involutive A telle que pour tout $x \in A$ on ait $\|x^* x\| = \|x\|^2$.

3.2 Remarque. Si une application involutive $x \mapsto x^*$ de l'algèbre normée A dans A vérifie $\|x^* x\| \geqslant \|x\|^2$ pour tout x, comme $\|x^* x\| \leqslant \|x^*\| \|x\|$ on a $\|x\| \leqslant \|x^*\|$; donc $\|x^*\| \leqslant \|(x^*)^*\|$; enfin $\|x\| = \|x^*\|$ et $\|x^* x\| = \|x\|^2$.

Voyons deux exemples fondamentaux de C^*-algèbres :

La C^*-algèbre $C(X)$: Soit X un espace topologique compact. On note $C(X)$ l'algèbre des fonctions continues à valeurs complexes sur X. Munissons $C(X)$ de la norme de la convergence uniforme $\|f\| = \sup\{\, |f(t)|\,,\ t \in X\,\}$ et de l'involution donnée par $f^*(t) = \overline{f(t)}$ (pour tout $t \in X$).

On a évidemment :

3.3 Proposition. *Munie de la norme de la convergence uniforme et de l'involution ci-dessus, $C(X)$ est une C^*-algèbre commutative et unifère.* $\square$

Quand on parlera de la C^*-algèbre $C(X)$ ce sera toujours l'algèbre $C(X)$ munie de la norme de la convergence uniforme et de l'involution ci-dessus.

La C^*-algèbre $\mathcal{L}(H)$

3.4 Proposition. *Soit H un espace hilbertien. L'algèbre de Banach $\mathcal{L}(H)$ munie de l'involution $T \mapsto T^*$ est une C^*-algèbre.*

Démonstration. Pour tout $T \in \mathcal{L}(H)$ et tout $x \in H$, $\|x\| \leqslant 1$ on a $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle \leqslant \|T^*T\|$ grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Donc $\|T\|^2 = \sup\{\, \|Tx\|^2 \,,\ x \in H \,,\ \|x\| \leqslant 1 \,\} \leqslant \|T^*T\|$ et la prop. résulte de la remarque 3.2. $\square$

3.5 Définition. Soit A une C^*-algèbre. Un élément h de A est dit *autoadjoint* ou *hermitien* si $h^* = h$; un élément a de A est dit *normal* si $a^*a = aa^*$; si A est unifère, un élément u de A est dit *unitaire* si on a $u^*u = uu^* = 1$.

Les éléments autoadjoints et unitaires sont normaux. Si x est un élément quelconque de A les éléments x^*x , xx^* , $x + x^*$ et $i(x - x^*)$ sont autoadjoints. En particulier tout élément x de A se décompose de façon unique sous la forme $x = h + ik$ avec h et k autoadjoints.

3.6 Proposition. *Soit A une C^*-algèbre unifère.*

a) Le spectre de tout élément unitaire de A est inclus dans $U(1) = \{\, z \in \mathbb{C} \,,\ |z| = 1 \,\}$.

b) Le spectre de tout élément autoadjoint de A est inclus dans $\mathbb{R}$.

c) Pour tout $x \in A$ on a $\mathrm{Sp}_A x^* = \{\, \overline{\lambda} \,,\ \lambda \in \mathrm{Sp}_A x \,\}$.

Démonstration. a) Soient u un élément unitaire et $\lambda \in \mathrm{Sp}_A u$. Comme $\|u\| = 1$ on a $|\lambda| \leqslant 1$ et comme $\|u^{-1}\| = 1$ on a $|\lambda^{-1}| \leqslant 1$.

b) Soit h un élément autoadjoint. Pour $t \in \mathbb{R}$, $t > \|h\|$, $h + it$ est inversible et $(h - it)(h + it)^{-1}$ est unitaire ; donc $\mathrm{Sp}_A h$ est inclus (par a et la prop. 4.5.a) dans $\{\, z \in \mathbb{C} \,,\ |(z - it)(z + it)^{-1}| = 1 \,\} = \mathbb{R}$.

c) Enfin, si $y = x - \lambda$ est inversible, on a $(y^{-1})^* y^* = y^*(y^{-1})^* = 1$ donc y^* est inversible et $(y^*)^{-1} = (y^{-1})^*$, d'où c). $\square$

3.7 Proposition. *Soient A une C^*-algèbre unifère et B une sous-algèbre involutive fermée de A contenant l'élément unité 1 de A. Pour tout élément x de B on a $\mathrm{Sp}_A x = \mathrm{Sp}_B x$.*

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{C} - \mathrm{Sp}_A x$; posons $y = (x - \lambda)^*(x - \lambda)$. Alors $\mathrm{Sp}_B y - \mathrm{Sp}_A y = \{\, \mu \in \mathbb{C} - \mathrm{Sp}_A y \,,\ (y - \mu)^{-1} \in A - B \,\}$ est une partie ouverte de $\mathbb{C}$, contenue dans $\mathbb{R}$ donc $\mathrm{Sp}_B y = \mathrm{Sp}_A y$. Or y est inversible dans A (prop. 3.6.c) donc dans B et $(x - \lambda)^{-1} = y^{-1}(x - \lambda)^* \in B$. $\square$

3.8 Remarque. Cette proposition n'est pas vraie pour des algèbres de Banach générales. Cependant, si B est une sous-algèbre fermée de l'algèbre de Banach A et $x \in B$, $\mathrm{Sp}_B x - \mathrm{Sp}_A x = \{\, \lambda \in \mathbb{C} - \mathrm{Sp}_A x \,,\ (x - \lambda)^{-1} \in A - B \,\}$ est une partie ouverte de $\mathbb{C}$, autrement dit la frontière de $\mathrm{Sp}_B x$ est incluse dans $\mathrm{Sp}_A x$. Ici, on a appliqué ce résultat à y.

3.9 Proposition. *Le rayon spectral de tout élément normal d'une C^*-algèbre est égal à sa norme.*

Démonstration. Soit h un élément autoadjoint. On a, par récurrence sur n, $\|h^{2^n}\| = \|h\|^{2^n}$, donc $\rho(h) = \|h\|$. Soit x un élément normal de la C^*-algèbre A. On a $(x^*x)^n = (x^*)^n x^n$ donc $\|(x^*x)^n\| = \|x^n\|^2$ et $\rho(x^*x) = \rho(x)^2$. Or x^*x est autoadjoint, donc $\rho(x)^2 = \rho(x^*x) = \|x^*x\| = \|x\|^2$. □

En particulier, la norme d'un élément x d'une C^*-algèbre A, ne dépend que de la structure d'algèbre et de l'involution de A, vu que $\|x\|^2 = \sup\{\,|\lambda|\,,\ \lambda \in \mathbb{C}\,,\ (x^*x - \lambda) \notin A^{-1}\,\}$.

Nous sommes en mesure à présent de démontrer le théorème de Gel'fand :

3.10 Théorème. *La transformation de Gel'fand $G : A \to C(\mathrm{Sp}\,A)$ d'une C^*-algèbre commutative et unifère A est un isomorphisme de C^*-algèbres.*

Démonstration. Montrons que G préserve l'involution. Il suffit pour cela de démontrer que pour tout élément autoadjoint h de A on a $G(h)^* = G(h)$. Or, pour tout $\chi \in \mathrm{Sp}\,A$, $G(h)(\chi) = \chi(h)$ est réel par la prop. 3.6.a).

Montrons que G est isométrique. Tout élément x de A est normal, donc $\|x\| = \rho(x) = \sup\{\,|\chi(x)|\,, \chi \in \mathrm{Sp}\,A\,\}$ (3.4.a).

En particulier, la sous-algèbre $G(A)$ de $C(\mathrm{Sp}\,A)$ est stable par conjugaison complexe et fermée dans $C(\mathrm{Sp}\,A)$. Comme de plus elle sépare les points de $\mathrm{Sp}\,A$ (deux caractères égaux sur A sont égaux !), $G(A) = C(\mathrm{Sp}\,A)$ par le théorème de Stone-Weierstrass *i.e.* G est surjective. □

3.11 Corollaire. *Soit x un élément normal d'une C^*-algèbre unifère A. Il existe un unique homomorphisme unital de C^*-algèbres $\Phi_x : C(\mathrm{Sp}_A x) \to A$ tel que $\Phi_x(z) = x$ où $z \in C(\mathrm{Sp}_A x)$ désigne l'inclusion de $\mathrm{Sp}_A x$ dans $\mathbb{C}$. De plus, l'homomorphisme Φ_x est isométrique. Si $\mathrm{Sp}_A x \subset \mathbb{R}$ alors $x = x^*$.*

Démonstration. Soit B l'adhérence dans A de l'ensemble $\{\,P(x,x^*)\,,\ P \in \mathbb{C}[X,Y]\,\}$. C'est une sous-algèbre commutative involutive fermée de A. Tout caractère χ de B étant autoadjoint, on a $\chi(x^*) = \overline{\chi(x)}$, et $\chi(P(x,x^*)) = P(\chi(x), \overline{\chi(x)})$. Donc $\chi \mapsto \chi(x)$ est un homéomorphisme de $\mathrm{Sp}\,B$ sur $\mathrm{Sp}_B x$ (prop. 3.4.a) qui est égal à $\mathrm{Sp}_A x$ (prop. 3.7). Identifions $\mathrm{Sp}\,B$ à $\mathrm{Sp}_A x$ à l'aide de cet homéomorphisme. La transformation de Gel'fand B est un isomorphisme isométrique $G : B \to C(\mathrm{Sp}_A x)$ et fait correspondre à x la fonction z. Il suffit donc de poser $\Phi_x(f) = G^{-1}(f)$.

Par ailleurs, $\{\,P(z,\overline{z}))\,,\ P \in \mathbb{C}[X,Y]\,\}$ est dense dans $C(\mathrm{Sp}_A x)$ (théorème de Stone-Weierstrass) ; tout homomorphisme unital de C^*-algèbres $\Phi : C(\mathrm{Sp}_A x) \to A$, vérifie $\Phi(P(z,\overline{z})) = P(\Phi(z), \Phi(z)^*)$ donc est déterminé par $\Phi(z)$, d'où l'unicité de Φ_x.

Enfin, si $\mathrm{Sp}_A x \subset \mathbb{R}$, $z = \overline{z}$ donc $x = \Phi_x(z) = x^*$. □

3.12 Définition. Soient x un élément normal d'une C^*-algèbre unifère A et f une fonction continue sur $\mathrm{Sp}_A x$. L'élément $\Phi_x(f)$ de A est noté $f(x)$.

3.13 Proposition. *a) Soient x un élément normal d'une C^*-algèbre unifère A et f une fonction continue sur $\mathrm{Sp}_A x$. On a $\mathrm{Sp}_A f(x) = f(\mathrm{Sp}_A x)$, l'élément $f(x)$ de A est normal et pour toute fonction $g \in C(\mathrm{Sp}_A f(x))$ on a $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

b) Soient $\pi : A \to B$ un homomorphisme involutif unital de C^*-algèbres (unifères), $x \in A$ un élément normal de A et f une fonction continue sur $\mathrm{Sp}_A x$. Alors $f(\pi(x)) = \pi(f(x))$.

Démonstration. a) L'élément $f - \lambda$ de $C(\mathrm{Sp}_A x)$ est inversible si et seulement si $f - \lambda$ ne s'annule pas dans $\mathrm{Sp}_A x$ *i.e.* si et seulement si $\lambda \notin f(\mathrm{Sp}_A x)$. L'application $f \mapsto f(x)$ est un isomorphisme de la C^*-algèbre $B = C(\mathrm{Sp}_A x)$ sur une sous-algèbre involutive fermée A' de A . On a alors $\mathrm{Sp}_A f(x) = \mathrm{Sp}_{A'} f(x) = \mathrm{Sp}_B f = f(\mathrm{Sp}_A x)$. Comme $f(x)$ appartient à la C^*-algèbre commutative A', il est normal. De plus, l'application $g \mapsto (g \circ f)(x)$ est un homomorphisme de $C(\mathrm{Sp}_A f(x))$ dans A et coïncide avec $g \mapsto g(f(x))$ par le corollaire 3.11.

b) Les homomorphismes $f \mapsto \pi(f(x))$ et $f \mapsto f(\pi(x))$ de $C(\mathrm{Sp}_A x)$ dans B coïncident sur la fonction z donc sont égaux. □

3.14 Proposition. *a) Tout homomorphisme involutif d'une algèbre de Banach involutive dans une C^*-algèbre est contractant.*

b) Tout homomorphisme involutif injectif entre C^*-algèbres unifères est isométrique.

Démonstration. Soient A une algèbre de Banach involutive, B une C^*-algèbre et $\pi : A \to B$ un homomorphisme involutif.

a) Soit $x \in A$. Alors $\mathrm{Sp}_B \pi(x^*x) \subset \mathrm{Sp}_A x^*x$. Par la prop. 3.9, on a

$$\|x\|^2 \geqslant \|x^*x\| \geqslant \rho(x^*x) \geqslant \rho(\pi(x^*x)) = \|\pi(x^*x)\| = \|\pi(x)\|^2$$

où ρ désigne le rayon spectral.

b) Supposons que A est une C^*-algèbre. Pour $t \in \mathbb{R}_+$ notons $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application telle que $s \mapsto \sup(|s| - t, 0)$. Pour un élément autoadjoint h d'une C^*-algèbre C on a $f_t(h) = 0 \iff \|h\| \leqslant t$. Soit $x \in A$, et posons $t = \|\pi(x^*x)\|$; alors $\pi(f_t(x^*x)) = f_t(\pi(x^*x)) = 0$; si π est injectif $f_t(x^*x) = 0$ et $\|x^*x\| \leqslant t$.

□

Remarquons qu'on n'a pas à supposer a priori l'homomorphisme π continu.

3.2 C*-algèbres sans unité

Toutes les C^*-algèbres considérées dans ce paragraphe ont été supposées unifères. Cependant tous les résultats ci-dessus restent vrais, avec très peu de modifications, pour des C^*-algèbres non unifères.

Si A est une algèbre de Banach non unifère, l'algèbre $\tilde{A}$ est formée des éléments $a + \lambda$, $a \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

3.15 Proposition. *Soit A une C^*-algèbre (non nécessairement unifère). Munie de l'involution telle que $(a+\lambda)^* = a^* + \overline{\lambda}$, l'algèbre $\tilde{A}$ est une C^*-algèbre et A est une sous-algèbre involutive fermée de $\tilde{A}$.*

Autrement dit il existe une norme sur $\tilde{A}$ (nécessairement unique) pour laquelle $\tilde{A}$ est une C^*-algèbre.

Démonstration. Si A est unifère, l'algèbre $\tilde{A}$ est isomorphe à la C^*-algèbre $A \times \mathbb{C}$. Supposons donc A non unifère et notons π l'action de $\tilde{A}$ dans A par multiplication à gauche (*i.e.* $\pi(a+\lambda)(b) = ab + \lambda b$) et munissons $\tilde{A}$ de la semi-norme $z \mapsto \|\pi(z)\|$. Soit $z = a + \lambda$ un élément de $\tilde{A}$. Pour $b \in A$ on a $(\pi(z)(b))^*(\pi(z)(b)) = b^*\pi(z^*z)(b)$. Donc $\|\pi(z)\|^2 = \sup\{\|b^*\pi(z^*z)b\|,\ b \in A,\ \|b\| \leqslant 1\} \leqslant \|\pi(z^*z)\|$. Il s'ensuit que $\|\pi(z)\|^2 = \|\pi(z^*z)\|$ (cf. remarque 3.2).

Pour $a \in A$, il est clair que $\|\pi(a)\| \leqslant \|a\|$; comme $\|aa^*\| = \|a\|\|a^*\|$, il s'ensuit que $\|\pi(a)\| = \|a\|$. Il s'ensuit que l'inclusion de A dans $\tilde{A}$ est isométrique. Comme A n'a pas d'unité, $\pi(1) \notin \pi(A)$ et la semi-norme $z \mapsto \|\pi(z)\|$ est une norme. Comme A est une algèbre de Banach, A est fermée dans $\tilde{A}$. Comme $\tilde{A}/A$ est isomorphe à $\mathbb{C}$, la norme $z \mapsto \|\pi(z)\|$ est équivalente à la norme $(a+\lambda) \mapsto \|a\| + |\lambda|$; en particulier, $\tilde{A}$ est une algèbre de Banach. C'est donc une C^*-algèbre. □

Comme A est une sous-algèbre involutive fermée de la C^*-algèbre $\tilde{A}$ et que pour $x \in A$, $\mathrm{Sp}_A x = \mathrm{Sp}_{\tilde{A}} x$, la prop. 3.6. a) et c) et la prop. 3.9 restent vraies *nec varietur* dans le cas non unifère.

Si x est un élément normal de A et f est une fonction continue sur $\mathrm{Sp}_A x$, $f(x) \in \tilde{A}$. Si $f(0) = 0$ il résulte de la prop. 3.13.b) appliquée à l'homomorphisme $a + \lambda \mapsto \lambda$ (de $\tilde{A}$ dans $\mathbb{C}$), que $f(x) \in A$. De cette manière tous les résultats de ce paragraphe restent vrais mutatis mutandis pour les C^*-algèbres non unifères.

Par exemple, si A est commutative, la transformation de Gel'fand de A comme celle de $\tilde{A}$ est un isomorphisme de C^*-algèbres, donc A est isomorphe à la C^*-algèbre $C_0(\mathrm{Sp}\, A)$.

3.3 Éléments positifs dans une C*-algèbre

3.16 Théorème. *Soit A une C^*-algèbre.*

a) Pour un élément autoadjoint de h de A les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{Sp}_A h \subset \mathbb{R}_+$;

(ii) Il existe $k \in A$ tel que $k = k^*$ et $k^2 = h$.

(iii) Il existe $x \in A$ tel que $x^* x = h$.

b) Les éléments autoadjoints de A vérifiant ces conditions forment un cône convexe saillant de A.

Démonstration. Soit $\tilde{A}$ la C^*-algèbre obtenue à partir de A par adjonction d'un élément unité. Il est clair que l'ensemble des éléments de A vérifiant (i) (*resp.* (ii), (iii)), est l'intersection de A avec l'ensemble des éléments de $\tilde{A}$ vérifiant (i) (*resp.* (ii), (iii)). On peut donc supposer que l'algèbre A est unifère.

Il est clair que (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Soit f l'application $t \mapsto t^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a $\mathrm{Sp}_A f(k) = f(\mathrm{Sp}_A k) \subset \mathbb{R}_+$. Donc (ii) $\Rightarrow$ (i).

Soit g l'application $t \mapsto \sqrt{t}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Si $\mathrm{Sp}_A h \subset \mathbb{R}_+$, alors $h = g(h)^2$. Donc (i) $\Rightarrow$ (ii).

Montrons à présent que les éléments de A satisfaisant à (i) forment un cône convexe saillant. Nous utiliserons un lemme :

3.17 Lemme. *a) La condition (i) est équivalente à :*

(iv) Il existe $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $\|t - h\| \leqslant t$.

b) L'ensemble A_+ des éléments autoadjoints de A vérifiant (iv) est un cône convexe saillant.

Démonstration. a) Le spectre d'un élément autoadjoint h est une partie X de $\mathbb{R}$, incluse dans $[-\|h\|, \|h\|]$. Pour $t \in \mathbb{R}_+$ on a $\{ s \in \mathbb{R},\ |t - s| \leqslant t \} = [0, 2t]$, donc $\|t - h\| \leqslant t$ si et seulement si X est inclus dans $[0, 2t]$; donc (iv) implique (i). Si (i) est vraie on a $X \subset [0, \|h\|]$ et (iv) est vraie (en posant $t = \|h\|/2$).

b) Si $\|t - h\| \leqslant t$ et $s \in \mathbb{R}_+$ on a $\|st - sh\| \leqslant st$ donc $sh \in A_+$. Autrement dit A_+ est un cône.
Si $\|s - h\| \leqslant s$ et $\|t - k\| \leqslant t$ on a $\|s + t - (h + k)\| \leqslant s + t$ donc $h + k \in A_+$. Il en résulte que le cône A_+ est convexe.
Enfin, si $h \in A_+$ et $-h \in A_+$ alors $\mathrm{Sp}_A h = \{0\}$ et $\|h\| = \rho(h) = 0$. Donc le cône A_+ est saillant. □

Fin de la démonstration du théorème 3.16 : Soit $x \in A$. Soit f l'application $t \mapsto inf(t, 0)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et posons $y = xf(x^*x)$. On a $y^*y = f(x^*x)x^*xf(x^*x) = f(x^*x)^3$, car pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $tf(t)^2 = f(t)^3$. Comme pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t)^3 \leqslant 0$, on a $-y^*y \in A_+$. Par la prop. 1.7, $\mathrm{Sp}_A(y^*y) \cup \{0\} = \mathrm{Sp}_A(yy^*) \cup \{0\}$ donc $-yy^* \in A_+$. Ecrivons $y = h + ik$ avec h et k autoadjoints ; on a $yy^* + y^*y = h^2 + k^2$ donc $y^*y = h^2 + k^2 - yy^* \in A_+$. Donc $y^*y = 0$ car le cône A_+ est saillant. Enfin, $f(x^*x) = 0$ *i.e.* $\mathrm{Sp}_A x \subset \mathbb{R}_+$. □

3.18 Définition. Un élément autoadjoint h satisfaisant aux conditions équivalentes du théorème est dit *positif.* Le cône des éléments positifs de la C^*-algèbre A est noté A_+. Pour des éléments hermitiens $a, b \in A$, la relation d'ordre $a - b \in A_+$ est notée $a \geqslant b$ ou encore $b \leqslant a$.

3.19 Proposition. *Soit A une C^*-algèbre unifère. Pour tout $a \in A_+$ il existe un unique élément $b \in A_+$ tel que $b^2 = a$.*

Démonstration. Soient f l'application $t \mapsto t^2$ et g l'application $t \mapsto \sqrt{t}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Par la prop. 3.13.a), pour $a, b \in A_+$, la condition $a = f(b)$ équivaut à $b = g(a)$. □

3.4 Opérateurs positifs dans un espace hilbertien et décomposition polaire

3.20 Proposition. *Soit H un espace hilbertien et $T \in \mathcal{L}(H)$.*

a) $T = T^*$ si et seulement si pour tout $x \in H$, $\langle x, Tx \rangle \in \mathbb{R}$.

b) $T \in \mathcal{L}(H)_+$ si et seulement si pour tout $x \in H$, $\langle x, Tx \rangle \in \mathbb{R}_+$.

Démonstration. a) Si $T = T^*$, $\overline{\langle x, Tx \rangle} = \langle Tx, x \rangle = \langle x, T^*x \rangle = \langle x, Tx \rangle$, donc $\langle x, Tx \rangle$ est réel.
Supposons inversement que pour tout $x \in H$, $\langle x, Tx \rangle \in \mathbb{R}$; alors, pour tout $x, y \in H$ on a $\langle x, Ty \rangle + \langle y, Tx \rangle = \langle x + y, T(x + y) \rangle - \langle x, Tx \rangle - \langle y, Ty \rangle$ est réel et $\langle x, Ty \rangle - \langle y, Tx \rangle = i(\langle x - iy, T(x - iy) \rangle - \langle x, Tx \rangle - \langle y, Ty \rangle)$ est imaginaire pur donc $\langle x, Ty \rangle = \overline{\langle y, Tx \rangle} = \langle Tx, y \rangle$ donc T est auto-adjoint.

b) Si $T = S^*S$, alors, pour tout $x \in H$ on a $\langle x, Tx \rangle = \langle Sx, Sx \rangle \in \mathbb{R}_+$.
Supposons inversement que pour tout $x \in H$, $\langle x, Tx \rangle \in \mathbb{R}_+$ et montrons que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et montrons que $T + \lambda$ est inversible. Pour $x \in H$, tel que $\|x\| = 1$ on a $(\|(T + \lambda)x\| \geqslant \langle x, (T + \lambda)x \rangle \geqslant \lambda$. Ceci prouve que $T + \lambda$ est bijective et bicontinue de H sur $(T + \lambda)H$. En particulier, $(T + \lambda)H$ est complet donc fermé dans H. Si $x \in ((T + \lambda)H)^\perp$, alors $0 = \langle x, (T + \lambda)x \rangle \geqslant \lambda \|x\|^2$ et $x = 0$ donc $T + \lambda$ est surjectif. □

3.21 Définition. Soient E et F des espaces hilbertiens. On appelle *module* de $T \in \mathcal{L}(E, F)$ l'opérateur $|T| \in \mathcal{L}(E)_+$ tel que $|T|^2 = T^*T$.

3.22 Proposition. *Soient E et F deux espaces hilbertiens et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Il existe un unique opérateur $u \in \mathcal{L}(E, F)$ nul sur* ker T *et tel que $T = u|T|$.*

Démonstration. Notons E_1 l'adhérence dans E de l'image de $|T|$. Pour tout $x \in E$ on a $\|Tx\|^2 = \langle x, T^*Tx \rangle = \| \, |T|x \, \|^2$. Donc $\ker |T| = \ker T$ et il existe une unique application linéaire isométrique $U : E_1 \to F$ telle que, pour $x \in E$ on ait $Tx = U|T|x$. La proposition résulte de ce que $E_1^\perp = \ker |T|$ (prop. 1.18). □

3.23 Définition. La décomposition $T = u|T|$ de la prop. 3.22 s'appelle la *décomposition polaire* de T.

Donnons sans démonstration quelques propriétés simples de la décomposition polaire :

3.24 Proposition. *Soient E et F deux espaces hilbertiens et $T \in \mathcal{L}(E,F)$; notons $T = u|T|$ sa décomposition polaire.*

a) uu^* est le projecteur orthogonal sur l'adhérence de l'image de T et u^*u est le projecteur orthogonal sur l'orthogonal du noyau de T.

b) On a $|T^*| = u|T|u^*$ et la décomposition polaire de T^* est $T^* = u^*|T^*|$;

c) On a $|T| = u^*T = T^*u$ et $T^* = |T|u^* = u^*Tu^*$;

d) Les opérateurs T et $|T|$ ont même noyau ; les opérateurs T^* et $|T|$ ont même image.

e) L'opérateur u est limite forte de la suite $T(1/n + |T|)^{-1}$. □

3.5 La relation d'ordre d'une C*-algèbre

Soit A une C^*-algèbre. Notons A_h le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des éléments hermitiens de A. Comme A_+ est un cône convexe saillant dans A_h, il existe une unique relation d'ordre dans A_h compatible avec la structure d'espace vectoriel de A_h pour laquelle A_+ est l'ensemble des éléments supérieurs à 0. Si a et b sont deux éléments de A_h, la relation $a \leqslant b$ équivaut à $b - a \in A_+$.

3.25 Lemme. *Soient A une C^*-algèbre unifère a un élément hermitien de A et $t \in \mathbb{R}_+$. Les relations $-t \leqslant a \leqslant t$ et $\|a\| \leqslant t$ sont équivalentes.*

Démonstration. Par définition, la relation $-t \leqslant a \leqslant t$ signifie que l'on a $\mathrm{Sp}(t+a) \subset \mathbb{R}_+$ et $\mathrm{Sp}(t-a) \subset \mathbb{R}_+$, c'est à dire $\mathrm{Sp}\, a \subset [-t,t]$. Le lemme en résulte vu que $\|a\| = \sup\{\,|s|\,,\ s \in \mathrm{Sp}\, a\,\}$. □

3.26 Proposition. *Soit A une C^*-algèbre et a, b, x des éléments de A.*

a) Si $0 \leqslant a \leqslant b$ on a $\|a\| \leqslant \|b\|$.

b) Si $a \leqslant b$ alors $x^*ax \leqslant x^*bx$.

Démonstration. Comme $A_+ = A \cap \tilde{A}_+$, on peut supposer que A est unifère.

a) Si $0 \leqslant a \leqslant b$, les éléments a et b sont hermitiens et l'on a $-\|b\| \leqslant 0 \leqslant a \leqslant b \leqslant \|b\|$ (lemme 3.25), donc $\|a\| \leqslant \|b\|$ (*loc. cit.*).

b) Si $b - a = y^*y$, alors $x^*bx - x^*ax = x^*(b-a)x = (yx)^*yx \in A_+$. □

3.27 Corollaire. *Soit A une C^*-algèbre unifère.*

a) Soient $x, y \in A$ avec y inversible. Les propriétés $x^*x \leqslant y^*y$ et $\|xy^{-1}\| \leqslant 1$ sont équivalentes.

b) Si $a, b \in A_+$ sont inversibles, les propriétés $a \leqslant b$ et $b^{-1} \leqslant a^{-1}$ sont équivalentes.

Démonstration. a) Si $x^*x \leqslant y^*y$ alors $(y^{-1})^*x^*xy^{-1} \leqslant (y^{-1})^*y^*yy^{-1} = 1$ par la prop. 3.26.b), donc $\|xy^{-1}\|^2 \leqslant 1$.

Réciproquement, posons $z = xy^{-1}$. Si $\|z\| \leqslant 1$, alors $z^*z \leqslant 1$, (lemme 3.25) donc $x^*x = y^*z^*zy \leqslant y^*y$ (prop. 3.26.b).

b) Posons $x = a^{1/2}$ et $y = b^{1/2}$. Comme l'adjoint de xy^{-1} est $y^{-1}x$, on a (par a) $a \leqslant b \iff \|xy^{-1}\| \leqslant 1 \iff \|y^{-1}x\| \leqslant 1 \iff y^{-2} \leqslant x^{-2}$. □

3.28 Corollaire. *Soient A une C^*-algèbre et $a, b \in A_+$. Notons $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ l'application $t \mapsto t(1+t)^{-1}$. Les propriétés $a \leqslant b$ et $f(a) \leqslant f(b)$ sont équivalentes.*

Démonstration. On peut supposer que A est unifère, vu que $A_+ = \tilde{A}_+ \cap A$). Par le corollaire 3.27.b), on a $a \leqslant b \iff 1 + a \leqslant 1 + b \iff (1+b)^{-1} \leqslant (1+a)^{-1} \iff 1 - (1+b)^{-1} \leqslant 1 - (1+a)^{-1}$. □

3.29 Lemme. *Soit x un élément d'une C^*-algèbre. Pour toute fonction f continue sur* $\mathrm{Sp}'(x^*x)$ *on a* $xf(x^*x) = f(xx^*)x$.

Démonstration. C'est clair si f est une fonction polynomiale. Le cas général en résulte par le théorème de Stone-Weierstrass. □

3.30 Proposition. *Soient A une C^*-algèbre et notons $\tilde{A}$ la C^*-algèbre déduite de A par adjonction d'un élément unité. Pour des éléments $a, b \in A$ les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $a^*a \leqslant b^*b$.

(ii) Pour tout $x \in A$ *on a* $\|ax\| \leqslant \|bx\|$.

(iii) Pour tout $x \in \tilde{A}$ *on a* $\|ax\| \leqslant \|bx\|$.

(iv) a est adhérent à $\{\, yb\,,\ y \in A\,,\ \|y\| < 1\,\}$.

Démonstration. Si $a^*a \leqslant b^*b$ alors $(ax)^*ax \leqslant (bx)^*bx$ (prop 3.26.b) donc $\|ax\|^2 \leqslant \|bx\|^2$ (prop. 3.26.a)

Supposons (ii) satisfaite et soit $x \in \tilde{A}$. Alors $\|ax\|^2 = \|axx^*a^*\| \leqslant \|bxx^*a^*\| = \|axx^*b^*\| \leqslant \|bxx^*b^*\| = \|bx\|^2$, vu que $xx^*a^* \in A\,,\ xx^*b^* \in A$ et que l'adjoint de bxx^*a^* est axx^*b^* ; donc (iii) est vérifiée.

Supposons (iii) satisfaite et posons $y_n = a(b^*b + 1/n)^{-1}b^* = ab^*(bb^* + 1/n)^{-1}$ (lemme 3.29). Comme $\|bb^*(bb^* + 1/n)^{-1}\| = \dfrac{\|bb^*\|}{\|bb^*\| + 1/n} < 1\,,\ \|y_n\| < 1$. Or $y_nb - a = a(nb^*b + 1)^{-1}$ et $\|b(nb^*b + 1)^{-1}\|^2 = (1/n)\sup\{\, t(t+1)^{-2}\,,\ t \in \mathrm{Sp}\,(nb^*b)\,\} \leqslant 1/4n$ donc $\lim y_nb = a$.

Enfin, si $a = yb$ alors $y^*y \leqslant \|y\|^2$, donc $a^*a \leqslant \|y\|^2 b^*b$ (prop. 3.26.b). L'ensemble $\{\, a \in A\,,\ a^*a \leqslant b^*b\,\}$ étant fermé, (iv) $\Rightarrow$ (i). □

3.31 Corollaire. *Soient z_n une suite d'éléments d'une C^*-algèbre A et $a, b \in A$ tels que $a^*a \leqslant b^*b$. Si la suite bz_n est convergente, la suite az_n est convergente.*

Démonstration. Par l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) dans le prop. 3.30, si la suite bz_n est de Cauchy, la suite az_n est de Cauchy. □

3.32 Proposition. *L'ensemble ordonné* $\Lambda = \{\, a \in A_+\,,\ \|a\| < 1\,\}$ *est une unité approchée de A.*

Démonstration. Notons $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ l'application $t \mapsto t(1+t)^{-1}$. L'application $b \mapsto f(b)$ est un isomorphisme d'ensembles ordonnés de A_+ sur Λ (cor. 3.28). Or pour $b, c \in A_+\,,\ b \leqslant b + c$ et $c \leqslant b + c$ donc A_+ est filtrant croissant.

Soient $x \in A\,,\ a \in A_+$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\varepsilon a \geqslant x^*x$. On a donc $\|x(1 - f(a))\|^2 = \|(1 - f(a))x^*x(1 - f(a))\| \leqslant \varepsilon\|a(1 - f(a)^2)\| \leqslant \varepsilon/4$, vu que por tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $t(1 - f(t)^2) = t(1+t)^{-2} \leqslant 1/4$.

Remplaçant x par son adjoint, on trouve $\|(1 - f(a))x\|^2 \leqslant \varepsilon/4$. □

3.6 Idéaux bilatères

3.33 Proposition. *Soient A une C^*-algèbre et J un idéal bilatère fermé dans A.*

a) L'idéal J est stable par l'involution de A.

b) Munie de l'involution et de la norme quotient, l'algèbre de Banach A/J est une C^*-algèbre.

Démonstration. a) Soit $x \in J$ et posons $|x| = (x^*x)^{1/2}$. Par la prop. 3.30, comme $x^*x = |x|^2$, il existe des suites a_n et b_n d'éléments de A tels que $|x| = \lim a_n x \in J$ et $x = \lim b_n |x|$, donc $x^* = \lim |x| b_n^* \in J$.

Il résulte de a) que J est une C^*-algèbre et que A/J est une algèbre de Banach involutive. Notons $\pi : A \to A/J$ l'application quotient. Pour établir b) nous utilisons la formule suivante donnant la norme d'un élément de A/J.

Notons Λ l'ensemble ordonné $\{ b \in J_+ ,\ \|b\| < 1 \}$.

3.34 Lemme. *Pour tout $x \in A$ on a :* $\|\pi(x)\| = \inf \{ \|x - xb\| ,\ b \in \Lambda \} = \lim\limits_{\Lambda} \|x - xb\|$.

Démonstration. On a $\|\pi(x)\| = \inf \{ \|x - z\| ,\ z \in J \} \leqslant \inf \{ \|x - xb\| ,\ b \in \Lambda \}$. Soit $z \in J$; pour tout $b \in \Lambda$, $\|1 - b\| \leqslant 1$ donc $\|x - z\| \geqslant \|(x - z)(1 - b)\| \geqslant \|x - xb\| - \|z - zb\|$. Or $\lim\limits_{\Lambda} \|z - zb\| = 0$, (prop. 3.32), donc $\limsup \|x - xb\| \leqslant \|x - z\|$. Ceci ayant lieu pour tout z on a $\|\pi(x)\| \geqslant \limsup\limits_{\Lambda} \|x - xb\| \geqslant \liminf\limits_{\Lambda} \|x - xb\| \geqslant \inf \{ \|x - xb\| ,\ b \in \Lambda \}$, donc ces quatre quantités sont égales. $\square$

Démontrons le b) de la prop. 3.33 :
Soit $x \in A$. Pour tout $b \in \Lambda$, $\|1 - b\| \leqslant 1$, donc $\|x^*x(1 - b)\| \geqslant \|(1 - b)x^*x(1 - b)\| = \|x - xb\|^2$ et par le lemme 3.34, $\|\pi(x^*x)\| \geqslant \|\pi(x)\|^2$. Donc A/J est une C^*-algèbre. $\square$

3.7 C*-algèbres enveloppantes

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre involutive. Une C^*-semi-norme sur $\mathcal{A}$ est une semi-norme p telle que pour tout $x \in \mathcal{A}$ on ait $p(x^*x) = p(x)^2$. Si p est une C^*-semi-norme sur $\mathcal{A}$, le séparé complété $\mathcal{A}_p$ de $\mathcal{A}$ par p est une C^*-algèbre et p est la semi-norme $a \mapsto \|i(a)\|$ où $i : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_p$ est l'application canonique de $\mathcal{A}$ dans son séparé complété.

Inversement, pour tout morphisme involutif f de $\mathcal{A}$ dans une C^*-algèbre B, l'application $a \mapsto \|f(a)\|$ est une C^*-semi-norme sur $\mathcal{A}$.

Soit Λ un ensemble de C^*-semi-normes sur une algèbre involutive $\mathcal{A}$. L'ensemble des $x \in \mathcal{A}$ tels que $\sup\{p(x) ,\ p \in \Lambda \} < +\infty$ est clairement une sous algèbre involutive $\mathcal{A}_\Lambda$ de $\mathcal{A}$; l'application $x \mapsto \sup\{p(x) ,\ p \in \Lambda \}$ est une C^*-semi-norme sur $\mathcal{A}_\Lambda$.

3.35 Définition. Soient $\mathcal{A}$ une algèbre involutive. Si $\mathcal{A}$ admet une plus grande C^*-semi-norme p on appellera *C^*-algèbre enveloppante* de $\mathcal{A}$ et on notera $C^*(\mathcal{A})$ le séparé complété de $\mathcal{A}$ pour la semi-norme p.

Il existe des algèbres involutives qui n'ont pas de C^*-algèbre enveloppante (exercice **??**).

3.36 Proposition. *Toute algèbre de Banach involutive admet une C^*-algèbre enveloppante.*

Démonstration. Résulte de la prop. 3.14.a). $\square$

Les C^*-algèbres enveloppantes sont bien sûr caractérisées par une propriété universelle :

3.37 Proposition. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre involutive qui admet une C^*-algèbre enveloppante et notons i le morphisme canonique de $\mathcal{A}$ dans son séparé complété $C^*(\mathcal{A})$. Alors $(C^*(\mathcal{A}), j)$ jouit de la propriété universelle suivante : pour tout homomorphisme involutif f de $\mathcal{A}$ à valeurs dans une C^*-algèbre D il existe un unique homomorphisme involutif $g : C^*(\mathcal{A}) \to D$ tel que $g \circ i = f$.*

Démonstration. Soit f un homomorphisme involutif de $\mathcal{A}$ à valeurs dans une C^*-algèbre D. Comme $x \mapsto \|f(x)\|$ est une C^*-semi-norme sur $\mathcal{A}$, on a, par définition de $C^*(\mathcal{A})$, $\|f(x)\| \leqslant \|i(x)\|$. Donc f se factorise de manière unique à travers le séparé complété $C^*(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$. □

4 Applications linéaires compactes

4.1 Généralités

4.1 Définition. Soient E et F des espaces de Banach. Une application linéaire $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est dit *compacte* si l'image par T de la boule unité fermée de E est (normiquement) relativement compacte dans F. On note $\mathcal{K}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires compactes de E dans F. On pose $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E, E)$.

Rappelons qu'une partie A d'un espace topologique séparé X est dite relativement compacte dans X s'il existe une partie compacte B de X contenant A. Dans ce cas B est fermée dans X donc contient $\overline{A}$ et $\overline{A}$ est alors fermé dans B donc est compacte. Autrement dit, A est relativement compacte si et seulement si $\overline{A}$ est compacte.

4.2 Proposition. *Soient E, F et H des espaces de Banach, $S \in \mathcal{L}(E, F)$ et $T \in \mathcal{L}(F, H)$; si S ou T est compacte alors TS est compacte.*

Démonstration. Si $K \subset F$ est compact et contient l'image par S de la boule unité de E, alors $T(K)$ est compact et contient l'image par TS de la boule unité de E.

Remarquons que l'image par S de la boule unité de E, est contenue dans la boule de F de centre 0 et de rayon $\|S\|$. Si $K \subset H$ est compact et contient l'image par T de la boule unité de F, alors $\|S\|K$ est compact et contient l'image par TS de la boule unité de E. □

Rappelons qu'un espace métrique X est dit *précompact* si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un recouvrement fini de X par des parties de diamètre $\leqslant \varepsilon$; rappelons qu'un espace métrique est compact si et seulement s'il est précompact est complet. En particulier, dans un espace métrique complet, les parties relativement compactes sont les parties précompactes.

4.3 Proposition. *Soient E et F des espaces de Banach. L'ensemble $\mathcal{K}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E, F)$.*

Démonstration. Il est clair que $0 \in \mathcal{K}(E, F)$ et que, si $T \in \mathcal{K}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $\lambda T \in \mathcal{K}(E, F)$. Si K_1 et K_2 sont des parties compactes de F alors $K_1 \times K_2$ est compacte dans $F \times F$, donc $K_1 + K_2 = \{ x+y \, , \ (x, y) \in K_1 \times K_2 \}$ est compact dans F ; on en déduit que $\mathcal{K}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$. Soit $T \in \overline{\mathcal{K}(E, F)}$. Notons B la boule unité de E et montrons que $T(B)$ est précompact ; soient $\varepsilon > 0$ et $S \in \mathcal{K}(E, F)$ tels que $\|S - T\| \leqslant \varepsilon/3$; comme $S(B)$ est précompact, il existe un recouvrement fini $(A_i)_{i \in I}$ de $S(B)$ par des parties de diamètre $\leqslant \varepsilon/3$; alors $(S^{-1}(A_i) \cap B)_{i \in I}$ est un recouvrement de B et $(T(S^{-1}(A_i) \cap B))_{i \in I}$ est un recouvrement fini de $T(B)$. Soient $i \in I$ et $x, y \in S^{-1}(A_i) \cap B$; alors $\|T(x) - T(y)\| \leqslant \|T(x) - S(x)\| + \|S(x) - S(y)\| + \|S(y) - T(y)\|$; or $\|T(x) - S(x)\| \leqslant \|T - S\| \leqslant \varepsilon/3$ car $x \in B$. De même, $\|S(y) - T(y)\| \leqslant \varepsilon/3$; de plus $\|S(x) - S(y)\| \leqslant \varepsilon/3$, puisque $x, y \in S^{-1}(A_i)$ et que le diamètre de A_i est $\leqslant \varepsilon/3$; on a montré que $(T(S^{-1}(A_i) \cap B))_{i \in I}$ est un recouvrement fini de $T(B)$ par des parties de diamètre $\leqslant \varepsilon$. □

4.2 Le cas hilbertien

Rappelons que la topologie *faible* sur un espace de Banach E est la topologie $\sigma(E,E')$.

4.4 Lemme. *a) Dans un espace normé toute suite faiblement convergente est bornée.*
b) Soit $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un système orthonormal dans un espace hilbertien ; alors e_n converge faiblement vers 0.

Démonstration. a) Soit x_n une suite faiblement convergente. Notons B la boule unité de E' ; pour tout $\ell\in E'$ la suite $\ell(x_n)$ est convergente, donc bornée. Il résulte alors du théorème de Banach-Steinhaus que $\{\,\ell(x_n)\,,\ \ell\in B\,,\ n\in\mathbb{N}\,\}$ est borné dans $\mathbb{C}$; or par le théorème de Hahn-Banach, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $\|x_n\|=\sup\{\,\ell(x_n)\,,\ \ell\in B\,\}$; on en déduit immédiatement que $\{\,\|x_n\|\,,\ n\in\mathbb{N}\,\}$ est borné.

b) Pour tout $x\in E$ on a $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}}|\langle e_n,x\rangle|^2\leqslant\|x\|^2$ (inégalité de Bessel) ; la suite $(\langle e_n,x\rangle)$ est de carré sommable donc tend vers 0. □

4.5 Théorème. *Soient E et F des espaces hilbertiens et $T\in\mathcal{L}(E,F)$. Notons B la boule unité fermée de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) $T(B)$ est (normiquement) relativement compact dans F.
(ii) $T(B)$ est (normiquement) compact dans F.
(iii) T est continu de B munie de la topologie faible dans F muni de la topologie normique.
(iv) T est (normiquement) adhérent à l'espace des applications linéaires continues de rang fini.
(v) Pour tout système orthonormal $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans E on a $\lim\|T(e_n)\|=0$.
(vi) Pour toute suite x_n de points de E convergeant faiblement vers 0 la suite $T(x_n)$ converge en norme vers 0.

Démonstration. (ii) $\Rightarrow$ (i) est clair. Comme B est faiblement compact (iii) $\Rightarrow$ (ii). Supposons (i) vérifiée et soit C une partie (normiquement) compacte de F contenant $T(B)$. L'identité de C muni de la topologie normique dans C muni de la topologie faible est continue ; comme C est normiquement compact, c'est un homéomorphisme. Comme T est continu de B muni de la topologie faible dans C muni de la topologie faible, (iii) est vérifiée.

Si T est de rang fini, les topologies faible et normique coïncident sur $T(E)$; or T est continu de E muni de $\sigma(E,E')$ dans $T(E)$ muni de la topologie faible (prop. 2.18), donc T vérifie (iii). Or une limite uniforme d'applications continues (d'un espace topologique X dans un espace métrique Y) est continue ; donc (iv) $\Rightarrow$ (iii).

Supposons que (iv) ne soit pas vérifiée. Il existe alors $\varepsilon>0$ tel que pour toute application linéaire continue de rang fini R on ait $\|T-R\|>\varepsilon$. Construisons alors par récurrence sur n un système orthonormal $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tel que $\|T(e_n)\|>\varepsilon$: comme $\|T\|>\varepsilon$, il existe $e_0\in E$ tel que $\|e_0\|=1$ et $\|T(e_0)\|>\varepsilon$; supposons e_k construit pour $k<n$ et soit P le projecteur orthogonal sur le sous-espace de E engendré par $\{\,e_k\,,\ k<n\,\}$; alors TP est de rang fini donc $\|T-TP\|>\varepsilon$; il existe donc $y_n\in E$ tel que $\|T(\mathrm{id}_E-P)(y_n)\|>\varepsilon\|y_n\|\geqslant\varepsilon\|(\mathrm{id}_E-P)(y_n)\|$; on pose alors $e_n=\|(\mathrm{id}_E-P)(y_n)\|^{-1}(\mathrm{id}_E-P)(y_n)$. On a alors $\|T(e_n)\|=\|(\mathrm{id}_E-P)(y_n)\|^{-1}\|T(\mathrm{id}_E-P)(y_n)\|>\varepsilon$; donc (v) n'est pas vérifiée. On a montré que (v) $\Rightarrow$ (iv).

(vi) $\Rightarrow$ (v) résulte du lemme 4.4.a). Enfin, si x_n est une suite tendant faiblement vers 0, elle est bornée et on peut supposer qu'elle est contenue dans B. Si (iii) est vérifiée, $T(x_n)$ tend en norme vers 0. Donc (iii) $\Rightarrow$ (vi). □

4.6 Proposition. *Soient E, F des espaces hilbertiens et $T\in\mathcal{L}(E,F)$. On a l'équivalence entre*
(i) T est compacte ;

(ii) T^* est compacte ;
(iii) T^*T est compacte ;
(iv) $|T|$ est compacte.

Démonstration. (ii)$\Rightarrow$(iii) résulte de la prop. 4.2 ; pour tout système orthonormal $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E on a $\|T(e_n)\|^2 = \langle T^*T(e_n), e_n\rangle \leqslant \|T^*T(e_n)\|$ donc si $\lim \|T^*T(e_n)\| = 0$, alors $\lim \|T(e_n)\| = 0$; donc (iii)$\Rightarrow$(i) (propriété équivalente (v) du théorème 4.5). On a montré que (ii)$\Rightarrow$(i). Appliquant cela à T^*, on en déduit que (i)$\Rightarrow$(ii). Appliquant (i) $\iff$ (iii) à $|T|$, on trouve (iv) $\iff$ (iii). $\square$

4.7 Théorème. *(Alternative de Fredholm) Soient E un espace hilbertien et $T \in \mathcal{K}(E)$.*
a) Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}-\{0\}$, l'image de $\lambda id_E - T$ est fermée et de codimension finie et l'on a $\operatorname{codim}(\lambda id_E - T)(E) = \dim \ker(\lambda id_E - T)$.
b) $\operatorname{Sp} T$ *est fini ou formé d'une suite tendant vers* 0.

Démonstration. a) En remplaçant T par T/λ on se ramène à $\lambda = 1$. Soit $R \in \mathcal{L}(E)$ de rang fini telle que $\|T - R\| < 1$. Alors $\mathrm{id}_E - T + R$ est inversible. Posons $S = R(\mathrm{id}_E - T + R)^{-1}$; c'est une application linéaire continue de rang fini. Or $\mathrm{id}_E - T = (\mathrm{id}_E - S)(\mathrm{id}_E - T + R)$; donc $\mathrm{id}_E - T$ et $\mathrm{id}_E - S$ ont même image et $\ker(\mathrm{id}_E - T) = (\mathrm{id}_E - T + R)^{-1} \ker(\mathrm{id}_E - S)$, donc ces deux noyaux ont même codimension. Il suffit donc de traiter le cas d'une application linéaire continue de rang fini. Soit alors F un sous-espace de dimension finie de E contenant $T(E)$ et $T^*(E)$ (remarquons que $T^*(E)$ a la même dimension finie que $T(E)$). Alors $\mathrm{id}_E - T$ est l'identité sur $F^\perp$ et laisse F stable. Notons $T_1 : F \to F$ la restriction de $\mathrm{id}_E - T$. Donc $(\mathrm{id}_E - T)(E) = F^\perp + T_1(F)$ et $\ker(\mathrm{id}_E - T) = \ker T_1$. On en déduit que l'image de $\mathrm{id}_E - T$ est $\{\, x \in E\,,\ p(x) \in \operatorname{im} T_1 \,\}$ où p est la projection orthogonale d'image F ; l'image de $\mathrm{id}_E - T$ est donc fermée et sa codimension est égale à la codimension de l'image de T_1 dans F. L'égalité $\operatorname{codim}(\mathrm{id}_E - T)(E) = \dim \ker(\mathrm{id}_E - T)$ résulte alors de l'égalité $\dim\ker T_1 + \dim \operatorname{im} T_1 = \dim F$.

b) On doit montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$ il y a un nombre fini de valeurs spectrales telles que $|\lambda| \geqslant \varepsilon$, autrement dit que toute suite λ_n de valeurs spectrales distinctes tend vers 0. Il résulte de a) que toute valeur spectrale non nulle de T est valeur propre de T. Soit alors λ_n une suite de valeurs propres distinctes et x_n des vecteurs propres associés. Montrons que $\lim \lambda_n = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons E_n l'espace engendré par $(x_k)_{0\leqslant k<n}$; comme les λ_k sont distinctes, le système x_k est libre, donc l'espace E_n est de dimension n. Notons e_n un vecteur de norme 1 de $E_{n+1} \cap E_n^\perp$; comme $T(x_k) = \lambda_k x_k$ on a $T(E_n) \subset E_n$. De plus, pour tout $k < n$, on a $(T - \lambda_n \mathrm{id}_E)(x_k) \in E_n$ et $(T - \lambda_n \mathrm{id}_E)(x_n) = 0 \in E_n$, donc $(T - \lambda_n \mathrm{id}_E)(E_{n+1}) \subset E_n$; on en déduit que $(T - \lambda_n \mathrm{id}_E)(e_n) \in E_n$, donc $\langle (T - \lambda_n)(e_n), e_n\rangle = 0$; donc $\langle T(e_n), e_n\rangle = \lambda_n$. En particulier, $\|T(e_n)\| \geqslant |\lambda_n|$. Par la caractérisation (v) des applications linéaires compactes, on a $\lim \lambda_n = 0$, d'où le résultat. $\square$

4.8 Théorème. *Une application linéaire compacte normale admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres.*

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire compacte normale. Soit S son spectre. Pour $\lambda \in S$ notons E_λ l'espace propre de T associé. On doit démontrer que :
a) les E_λ sont deux à deux orthogonaux
b) Le sous-espace engendré par les E_λ est dense.

Alors si B_λ est une base hilbertienne de E_λ, $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in S} B_\lambda$ sera la base voulue.

Si $x \in E_\lambda$, comme $TT^*(x) = T^*T(x) = \lambda T^*(x)$ on trouve $T^*(x) \in E_\lambda$. Pour tout $y \in E_\lambda$ on a $\langle T^*(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle = \langle \overline{\lambda} x, y\rangle$; donc $T^*(x) - \overline{\lambda} x \in E_\lambda \cap E_\lambda^\perp$ donc $T^*(x) = \overline{\lambda} x$.

Si $x \in E_\lambda$ et $y \in E_\mu$ alors $\langle T(x), y\rangle = \mu\langle x, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ d'où a).

Notons F le sous-espace de E engendré par les $E_\lambda\,,\ \lambda \in S - \{0\}$. Alors $T(F) \subset F$ et $T^*(F) \subset F$. Il s'ensuit que $T(F^\perp) \subset F^\perp$ et $T^*(F^\perp) \subset F^\perp$. Notons $T_1 \in \mathcal{L}(F^\perp)$ la restriction de T. Alors T_1^* est la restriction de T^*, donc T_1 est normal. Remarquons que T_1 est compacte, qu'elle n'a pas de valeur propre non nulle ; par l'alternative de Fredholm, T_1 n'a pas de valeur spectrale non nulle ; par la prop. 3.9, $T_1 = 0$, donc $F^\perp = E_0$, d'où b). □

4.3 Opérateurs de Hilbert-Schmidt

4.9 Lemme. *Soient E et F des espaces hilbertiens, B une base hilbertienne de E et B' une base hilbertienne de F. Pour tout $T \in \mathcal{L}(E,F)$ on a :*

$$\sum_{b\in B\,,\,b'\in B'} |\langle b', T(b)\rangle|^2 = \sum_{b\in B} \|T(b)\|^2 = \sum_{b'\in B'} \|T^*(b')\|^2 (\in \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\})\,.$$

Cette quantité ne dépend pas des bases B et B' choisies.

Démonstration. Pour $x \in E$ et $y \in F$ on a $\|x\|^2 = \sum_{b\in B} |\langle x, b\rangle|^2$ et $\|y\|^2 = \sum_{b'\in B'} |\langle b', y\rangle|^2$, d'où la première assertion. Il est clair que $\sum_{b\in B} \|T(b)\|^2$ ne dépend pas de B' et que $\sum_{b'\in B'} \|T^*(b')\|^2$ ne dépend pas de B, d'où la deuxième assertion. □

Pour $T \in \mathcal{L}(E,F)$ on pose $\|T\|_2 = \Big(\sum_{b\in B} \|T(b)\|^2\Big)^{1/2}$ où B est une base hilbertienne de E. Posons $\mathcal{L}^2(E,F) = \{\, T \in \mathcal{L}(E,F)\,,\ \|T\|_2 < +\infty\,\}$.

4.10 Théorème. *Soient E et F des espaces hilbertiens.*
a) L'ensemble $\mathcal{L}^2(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$.
b) Pour tout $S,T \in \mathcal{L}^2(E,F)$ et toute base hilbertienne B de E, la famille $(\langle S(b), T(b)\rangle)_{b\in B}$ est sommable ; l'application $(S,T) \mapsto \sum_{b\in B} \langle S(b), T(b)\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{L}^2(E,F)$ indépendant de la base B.
On note $(S,T) \mapsto (S,T)_2$ ce produit scalaire.
c) Muni de ce produit scalaire, $\mathcal{L}^2(E,F)$ est un espace hilbertien.
d) $\mathcal{L}^2(E,F) \subset \mathcal{K}(E,F)$.
e) Soit $T \in \mathcal{K}(E,F)$; notons $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ les valeurs propres de $|T|$ (qui est compact par la prop. 4.6) comptées avec leur multiplicité. Alors $\|T\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbf{N}} \lambda_n^2$.

Démonstration. a) et b) Soient $S,T \in \mathcal{L}(E,F)$ et B une base hilbertienne de E. Pour $b \in B$ on a $|\langle S(b), T(b)\rangle| \leqslant \|S(b)\|\|T(b)\| \leqslant 1/2(\|S(b)\|^2 + \|T(b)\|^2)$. On en déduit que $(\langle S(b), T(b)\rangle)_{b\in B}$ est sommable. Comme $\|S(b)+T(b)\|^2 = \|S(b)\|^2 + \|T(b)\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle S(b), T(b)\rangle)$, on en déduit que $S+T \in \mathcal{L}^2(E,F)$; a) est alors clair. Il est clair que $(S,T) \mapsto \sum_{b\in B} \langle S(b), T(b)\rangle$ est un produit scalaire. On a $\sum_{b\in B} \langle S(b), T(b)\rangle = 1/4(\|S+T\|_2^2 - \|S-T\|_2^2 + i\|S+iT\|_2^2 - i\|S-iT\|_2^2)$, (identité de polarisation - proposition 1.2) d'où l'indépendance de la base.

c) De b) il résulte que $\mathcal{L}^2(E,F)$ est un espace préhilbertien. On doit montrer qu'il est séparé et complet. Remarquons que, pour tout $T \in \mathcal{L}^2(E,F)$ et tout $x \in E$ de norme 1, prenant une base hilbertienne contenant x, on a $\|T\|_2 \geqslant \|T(x)\|$; ceci ayant lieu pour tout x il en résulte que $\|T\|_2 \geqslant \|T\|$. En particulier $\mathcal{L}^2(E,F)$ est séparé. Soit T_n une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^2(E,F)$; comme $\|\ \| \leqslant \|\ \|_2$, T_n est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E,F)$ qui est complet, donc la suite T_n converge en norme vers un opérateur T. Soit alors $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$; remarquons que l'ensemble $C_\varepsilon = \{\, S \in \mathcal{L}(E,F)\,,\ \|S\|_2 \leqslant \varepsilon \,\}$ est l'intersection pour toutes les parties finies I de B de $\{\, S \in \mathcal{L}(E,F)\,,\ \sum_{b\in I} \|S(b)\|^2 \leqslant \varepsilon^2 \,\}$; c'est donc une partie fermée de $\mathcal{L}(E,F)$. Comme T_n est de Cauchy dans $\mathcal{L}^2(E,F)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $m,n \geqslant N$ on ait $\|T_m - T_n\|_2 \leqslant \varepsilon$. Fixons $n \geqslant N$; comme $T_m - T_n$ converge vers $T - T_n$, on a $T - T_n \in C_\varepsilon$; on en déduit immédiatement que $T \in \mathcal{L}^2(E,F)$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T - T_n\|_2 = 0$.

d) Soit $T \in \mathcal{L}^2(E,F)$ et e_n un système orthonormal. Soit B une base contenant les e_n. La famille $(\|T(b)\|^2)$ est sommable, donc la suite $\|T(e_n)\|$ tend vers 0. Donc T est compact par la caractérisation (v) du théorème 4.5.

d) est clair si on choisit une base B formée de vecteurs propres pour $|T|$. □

4.11 Définition. Soient E et F des espaces hilbertiens. Un opérateur $T \in \mathcal{L}^2(E,F)$ est dit de *Hilbert-Schmidt.*

4.12 Proposition. *Soient E, F et H des espaces hilbertiens. Pour tout $S \in \mathcal{L}(E,F)$ et $T \in \mathcal{L}(F,H)$ on a :*
a) $\|S\|_2 = \|S^*\|_2$.
b) $\|TS\|_2 \leqslant \|T\|\|S\|_2$ et $\|TS\|_2 \leqslant \|T\|_2\|S\|$.
c) Si S ou T est un opérateur de Hilbert-Schmidt alors il en va de même pour TS.

Démonstration. a) résulte de la définition de $\|S\|_2$ (lemme 4.9).
b) Soit B une base hilbertienne de E. Pour tout $b \in B$ on a $\|TS(b)\| \leqslant \|T\|\|S(b)\|$ donc $\|TS\|_2^2 = \sum_{b\in B} \|TS(b)\|^2 \leqslant \|T\|^2 \sum_{b\in B} \|S(b)\|^2 = \|T\|\|S\|_2$. La deuxième assertion en résulte en remplaçant S et T par leurs adjoints.
c) résulte aussitôt de b). □

En particulier l'espace $\mathcal{L}^2(E) = \mathcal{L}^2(E,E)$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(E)$.

4.4 Opérateurs nucléaires

4.13 Proposition. *a) Soient E un espace hilbertien et $T \in \mathcal{L}(E)_+$. La quantité $Tr(T) = \sum_{b\in B} \langle T(b), b\rangle \in (\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\})$ ne dépend pas de la base hilbertienne B.*
b) Pour tout $S,T \in \mathcal{L}(E)_+$ et tout $\lambda \in \mathbf{R}_+$ on a $Tr(S+T) = Tr(S) + Tr(T)$ et $Tr(\lambda S) = \lambda Tr(S)$.
c) Soient F un espace hilbertien $U \in \mathcal{L}(E,F)$ un opérateur unitaire et $T \in \mathcal{L}(E)_+$ alors $Tr(UTU^*) = Tr(T)$.
d) Si $T \in \mathcal{L}(E)_+$ est compact, $Tr(T)$ est la somme des valeurs propres de T comptées avec leur multiplicité.

Démonstration. Écrivons $T = S^*S$ alors $Tr(T) = \|S\|_2^2$ ne dépend pas de la base, d'où a). b) est clair. Soit B une base hilbertienne de E ; alors $U(B)$ est une base hilbertienne de F. On a $\sum_{b\in U(B)} \langle UTU^*(b), b\rangle = \sum_{b\in B} \langle T(b), b\rangle$, d'où c). Enfin, d) est clair si on choisit une base B formée de vecteurs propres pour T. □

Soient E, F des espaces hilbertiens. Pour $T \in \mathcal{L}(E,F)$ posons $\|T\|_1 = Tr(|T|)$ et $\mathcal{L}^1(E,F) = \{ T \in \mathcal{L}(E,F)\,,\ \|T\|_1 < +\infty \}$.

4.14 Lemme. *Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$.*
a) Soient H un espace hilbertien et $S \in \mathcal{L}(E,H)$ tels que $|T| = S^*S$. On a $\|T\|_1 = \|S\|_2^2$.
b) On a $\|T\|_1 = \sup\{|(TR,S)_2|\,,\ R \in \mathcal{L}^2(E)\,,\ S \in \mathcal{L}^2(E,F)\,,\ \|R\|\|S\| \leqslant 1\}$.

Démonstration. a) est clair.

b) Si $T \in \mathcal{L}^1(E,F)$, alors $|T|^{1/2} \in \mathcal{L}^2(E)$; soient $R \in \mathcal{L}^2(E)$ et $S \in \mathcal{L}^2(E,F)$ tels que $\|S\|\|R\| \leqslant 1$. Soit B une base hilbertienne de E ; on a $(TR,S)_2 = \sum_B \langle TR(b), S(b)\rangle = (|T|^{1/2}R, |T|^{1/2}u^*S)_2$ où u est la phase de T. On en déduit que $|(TR,S)_2| \leqslant \||T|^{1/2}R\|_2 \||T|^{1/2}u^*S\|_2 \leqslant \|u^*S\|\|R\|\||T|^{1/2}\|_2^2 \leqslant \||T|^{1/2}\|_2^2 = \|T\|_1$. Donc $\{|(TR,S)_2|\,,\ R \in \mathcal{L}^2(E)\,,\ S \in \mathcal{L}^2(E,F)\,,\ \|R\|\|S\| \leqslant 1\}$ est majoré par $\|T\|_1$.

Soit B une base hilbertienne de E et I une partie finie de B ; notons P le projecteur orthogonal sur le sous-espace de E engendré par I ; alors $\sum_{b\in I} \langle |T|(b), b\rangle = \sum_{b\in I}\langle u^*T(b), b\rangle = (TP, uP)_2 \leqslant \sup\{|(TR,S)_2|\,,\ R \in \mathcal{L}^2(E)\,,\ S \in \mathcal{L}^2(E,F)\,,\ \|R\|\|S\| \leqslant 1\}$. Prenant le « sup » sur les parties finies de B on trouve $\|T\|_1 \leqslant \sup\{|(TR,S)_2|\,,\ R \in \mathcal{L}^2(E)\,,\ S \in \mathcal{L}^2(E,F)\,,\ \|R\|\|S\| \leqslant 1\}$. □

4.15 Théorème. *Soient E, F, H des espaces hilbertiens.*

a) L'ensemble $\mathcal{L}^1(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$.

b) L'application $T \mapsto \|T\|_1$ est une norme sur $\mathcal{L}^1(E,F)$ pour laquelle $\mathcal{L}^1(E,F)$ est complet.

c) Pour tout $T \in \mathcal{L}(E,F)$ on a $\|T\|_1 = \|T^*\|_1$.

d) Pour tout $S \in \mathcal{L}(E,F)$ et tout $T \in \mathcal{L}(F,H)$ on a $\|TS\|_1 \leqslant \|S\|_1\|T\|$ et $\|TS\|_1 \leqslant \|S\|\|T\|_1$.

Démonstration. a) et b) Soient $S, T \in \mathcal{L}(E,F)$. Pour tout $R_1 \in \mathcal{L}^2(E)$ et $R_2 \in \mathcal{L}^2(E,F)$ tels que $\|R_1\|\|R_2\| \leqslant 1$, on a $|((S+T)R_1, R_2)_2| \leqslant |(SR_1,R_2)_2| + |(TR_1,R_2)_2|$. Par le lemme 4.14.b), $\|S+T\|_1 \leqslant \|S\|_1 + \|T\|_1$; on en déduit immédiatement que $\mathcal{L}^1(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$ et que $\|\ \|_1$ est une semi-norme. Par le lemme 4.14.a), $\|T\|_1 = \||T|^{1/2}\|_2^2 \geqslant \||T|^{1/2}\|^2 = \|T\|$ (prop. 1.17). En particulier, $\|\ \|_1$ est une norme.

Par le lemme 4.14.b) l'application $T \mapsto Tr(|T|)$ est semi-continue inférieurement et on en déduit comme dans le th. 4.10.c) que, muni de cette norme $\mathcal{L}^1(E)$ est complet.

c) On a $|T^*| = u|T|u^* = (|T|^{1/2}u^*)^*(|T|^{1/2}u^*)$. Donc $\|T^*\|_1 = \||T|^{1/2}u^*\|_2^2 \leqslant \||T|^{1/2}\|_2^2 = \|T\|_1$; remplaçant T par T^*, on en déduit c).

d) Soient $R_1 \in \mathcal{L}^2(E)$ et $R_2 \in \mathcal{L}^2(E,H)$. On a $(TSR_1, R_2)_2 = (SR_1, T^*R_2)_2$. Il résulte alors du lemme 4.14.b) que $\|TS\|_1 \leqslant \|S\|_1\|T\|$; remplaçant S et T par leur adjoint il résulte de c) que $\|TS\|_1 \leqslant \|S\|\|T\|_1$. □

4.16 Théorème. *Soient E, F des espaces hilbertiens.*

a) Pour $T \in \mathcal{L}^1(E)$ et pour toute base hilbertienne B de E la famille $(\langle T(b), b\rangle)_{b\in B}$ est sommable et la quantité $Tr(T) = \sum_{b\in B}\langle T(b), b\rangle$ ne dépend pas de la base hilbertienne B.

b) On a $|Tr(T)| \leqslant Tr(|T|)$.

c) Pour tout $S \in \mathcal{L}(E,F)\,,\ T \in \mathcal{L}(F,E)$ si $S \in \mathcal{L}^1(E,F)$ ou si S et T sont de Hilbert-Schmidt, alors $Tr(TS) = Tr(ST)$.

Démonstration. On a $\langle T(b), b\rangle = \langle |T|^{1/2}(b), |T|^{1/2}u^*(b)\rangle$. Comme $|T|^{1/2}, |T|^{1/2}u^* \in \mathcal{L}^2(E)$, a) résulte du théorème 4.10.b). De plus $|Tr(T)| = |(|T|^{1/2}, |T|^{1/2}u^*)_2| \leqslant \||T|^{1/2}\|_2\||T|^{1/2}u^*\|_2 \leqslant \|T\|_1$, d'où b).

c) L'application $S \mapsto S^*$ est une isométrie antilinéaire de $\mathcal{L}^2(E, F)$ dans $\mathcal{L}^2(F, E)$; pour $S \in \mathcal{L}^2(E, F)$, on a alors $Tr(S^*S) = Tr(SS^*)$. Par l'identité polarisation on en déduit que, pour $S, S_1 \in \mathcal{L}^2(E, F)$, on a $Tr(S_1^*S) = Tr(SS_1^*)$. Soit $T \in \mathcal{L}^2(F, E)$; posant $S_1 = T^*$, on en déduit $Tr(TS) = Tr(ST)$.

Enfin, soient $T \in \mathcal{L}(F, E)$ et $S \in \mathcal{L}^1(E, F)$. Donnons nous $S_1 \in \mathcal{L}^2(E, F)$, $S_2 \in \mathcal{L}^2(E)$ tels que $S = S_1S_2$; on a $Tr(ST) = Tr(S_1S_2T) = Tr(S_2TS_1) = Tr(TS)$. □

4.17 Définition. Un opérateur $T \in \mathcal{L}^1(E)$ est appelé *nucléaire* ou *à trace.*

Il est clair que
- $\mathcal{L}^1(E, F) \subset \mathcal{L}^2(E, F)$.
- Un opérateur de rang fini est nucléaire.

5 Appendice : Unités approchées dans les algèbres de Banach

5.1 Unités approchées

5.1 Définition. On appelle *unité approchée* à gauche (*resp.* à droite) d'une algèbre de Banach A une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de A indexée par un ensemble filtré I telle que, pour tout $x \in A$ on ait $\lim u_ix = x$ (*resp.* $\lim xu_i = x$). On appelle unité approchée de A une famille qui est à la fois une unité approchée à gauche et à droite.

Une unité approchée (*resp.* unité approchée à gauche, à droite) u_i est dite bornée si $\{\, \|u_i\|\,,\ i \in I\,\}$ est majoré.

5.2 Remarque. Soient $(u_i)_{i\in I}$ une unité approchée à gauche bornée et $(v_j)_{j\in J}$ une unité approchée à droite bornée de A. Alors $(u_i + v_j - v_ju_i)_{(i,j)\in I\times J}$ est une unité approchée (à gauche et à droite), où l'on munit $I \times J$ du filtre produit. En effet, $(u_i + v_j - v_ju_i)a = u_ia + v_j(a - u_ia)$ et $a(u_i + v_j - v_ju_i) = av_j + (a - av_j)u_i$ tendent vers a pour tout $a \in A$. En particulier, une algèbre de Banach involutive possédant une unité approchée à gauche bornée, possède une unité approchée bornée.

Soit A une algèbre et soit E un espace de Banach qui est un A-module. On dit que le A-module E est *non dégénéré* si le sous-espace vectoriel engendré par $\{\, ax\,,\ a \in A\,,\ x \in E\,\}$ est dense dans E.

5.3 Proposition. *Soient A une algèbre de Banach, E un A-module banachique et $(u_i)_{i\in I}$ une unité approchée à gauche bornée de A. Alors le A-module E est non dégénéré si et seulement si, pour tout $x \in E$, on a $\lim u_ix = x$.*

Démonstration. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $\{\, ax\,,\ a \in A\,,\ x \in E\,\}$. Le A-module E est non dégénéré si et seulement si F est dense dans E.

Il est clair que $\lim u_ix = x$ pour tout $x \in F$. Comme l'unité approchée u_i est bornée et que E est un module banachique, cela reste vrai pour tout x adhérent à F donc, si F est dense dans E, pour tout $x \in E$.

Réciproquement, pour tout $x \in E$ et tout $i \in I$, $u_ix \in F$. Si, pour tout $x \in E$, on a$\lim u_ix = x$, alors F est dense dans E. □

On en déduit immédiatement :

5.4 Corollaire. *Soient A une algèbre de Banach possédant une unité approchée à gauche bornée et E un A-module banachique non dégénéré. Tout sous-module fermé de E est non dégénéré.* $\square$

5.5 Théorème. *(Cohen) Soient A une algèbre de Banach possédant une unité approchée à gauche bornée et E un module banachique non dégénéré de A. Alors pour tout $x \in E$ il existe $a \in A$ et $y \in E$ tels que $x = ay$.*

Démonstration. Soient $d \in \mathbb{R}_+$ ($d \geqslant 1$) et $(u_i)_{i \in I}$ une unité approchée à gauche de A telle que, pour tout $i \in I$, $\|u_i\| \leqslant d$. Notons $\tilde{A}$ l'algèbre de Banach obtenue en adjoignant une unité (notée 1) à A. Si $a \in A$ est tel que $\|a\| \leqslant d$ alors $\dfrac{2d+a}{2d+1}$ est inversible dans $\tilde{A}$ et

$$\left(\frac{2d+a}{2d+1}\right)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{a-1}{2d+1}\right)^n .$$

En particulier, $\left\|\left(\dfrac{2d+a}{2d+1}\right)^{-1}\right\| \leqslant 2 + 1/d.$

À l'aide de la prop. 5.3, on construit par récurrence une suite i_n , $n \geqslant 1$ d'éléments de I et une suite $a_n = a'_n + \left(\dfrac{2d}{2d+1}\right)^n$, $n \geqslant 0$ d'éléments de $\tilde{A}$ tels que $a_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 1$, on ait :

$$a_n = \left(\frac{2d+u_{i_n}}{2d+1}\right)a_{n-1} \ , \ a'_n \in A \ , \ \|u_{i_n}a'_{n-1} - a'_{n-1}\| \leqslant 2^{-n} \quad \text{et} \quad \|u_{i_n}x - x\| \leqslant 6^{-n} .$$

Remarquons que $\|a_n^{-1}x - a_{n-1}^{-1}x\| = \|(2d+1)^{-1}a_n^{-1}(x - u_{i_n}x)\| \leqslant (2d+1)^{-1}(2+1/d)^n 6^{-n} \leqslant 2^{-n}$ vu que $d \geqslant 1$. De plus,

$$a'_n = \left(\frac{2d+u_{i_n}}{2d+1}\right)a'_{n-1} + \frac{u_{i_n}}{2d+1}\left(\frac{2d}{2d+1}\right)^{n-1}$$

de sorte que

$$a'_n - a'_{n-1} = \frac{(u_{i_n}-1)a'_{n-1}}{2d+1} + \frac{u_{i_n}}{2d+1}\left(\frac{2d}{2d+1}\right)^{n-1}$$

Les suites a'_n et $a_n^{-1}x$ sont donc de Cauchy. Notons a et y leurs limites respectives ; on a clairement $x = ay$. $\square$

Une façon équivalente d'énoncer ce théorème est la suivante :

5.6 Corollaire. *Soient A une algèbre de Banach possédant une unité approchée à gauche bornée et E un A-module (à gauche) banachique. Alors $\{\, ax \, , \ a \in A \, , \ x \in E \,\}$ est un sous-module fermé de E.*

Démonstration. Notons F le sous-module fermé de E engendré par $\{\, ax \, , \ a \in A \, , \ x \in E \,\}$. C'est un A-module Banachique non dégénéré. Le corollaire résulte du théorème 5.5 appliqué au A-module F. $\square$

5.7 Corollaire. *Soient A une algèbre de Banach possédant une unité approchée à gauche bornée et a_n une suite d'éléments de A tels que* $\lim a_n = 0$*. Alors il existe un élément $a \in A$ et une suite b_n d'éléments de A tels que* $\lim b_n = 0$ *et $a_n = ab_n$ pour tout n.*

Démonstration. On applique le théorème 5.5 au module banachique des suites b_n d'éléments de A telles que $\lim b_n = 0$. □

5.8 Corollaire. *Soient A une algèbre de Banach possédant une unité approchée à gauche bornée, E un A-module à droite banachique et $T : A \to E$ une application telle que, pour tout $a, b \in A$ on ait $T(ab) = T(a)b$. Alors T est linéaire et continue.*

Démonstration. Soient $a_1, a_2 \in A$ et $\lambda \in \mathbb{C}$; il existe $a, b_1, b_2 \in A$ tels que $a_1 = a_1 b$ et $a_2 = ab_2$ (corollaire 5.7). Alors $T(a_1 + a_2) = T(a)(b_1 + b_2) = T(a_1) + T(a_2))$ et $T(\lambda a_1) = T(a)(\lambda b_1) = \lambda T(a_1)$, donc T est linéaire. Soit a_n une suite d'éléments de A tels que $\lim a_n = 0$; par le corollaire 5.7, il existe un élément $a \in A$ et une suite b_n d'éléments de A tels que $\lim b_n = 0$ et $a_n = ab_n$ pour tout n. Alors $Ta_n = (Ta)b_n$ donc $\lim Ta_n = 0$ et T est continu. □

5.9 Corollaire. *Soient A une algèbre de Banach possédant une unité approchée à gauche bornée, E un module banachique non dégénéré de A et B une algèbre contenant A comme idéal à gauche. Alors il existe sur E une unique structure de B-module prolongeant l'opération de A.*

Démonstration. Soient $b \in B$ et $x \in E$. Par le théorème 5.5, il existe $a \in A$ et $y \in E$ tels que $x = ay$. Pour toute structure de B-module sur E prolongeant l'opération de A on a $bx = (ba)y$. Inversement, fixons une unité approchée à gauche bornée u_i de A. L'élément b de B définit un endomorphisme du A module à droite A, donc $(bu_i)a$ converge vers ba (cor. 5.8) ; il s'ensuit que $(bu_i)x$ converge vers $(ba)y$. On définit alors une opération de B dans E en posant $bx = \lim((bu_i)x)$. □

Si de plus l'inclusion de A dans B est un homomorphisme isométrique d'algèbres de Banach et $\|u_i\| \leqslant 1$, alors $\|bx\| \leqslant \sup \|bu_i\| \|x\|$ donc E est un B-module banachique.

5.10 Corollaire. *Soient A une algèbre de Banach, I un idéal à gauche fermé de A et B une algèbre contenant A comme idéal à gauche. Si l'une des algèbres A ou I possède une unité approchée à gauche bornée alors I est un idéal à gauche de B.*

Démonstration. Soit $x \in I$. Sous chacune des deux hypothèses, il existe $a \in A$ et $y \in I$ tels que $x = ay$: si A possède une unité approchée bornée à gauche, on applique le théorème 5.5 au A-module banachique I qui est non dégénéré par le corollaire 5.4 ; si I possède une unité approchée bornée à gauche, on peut même supposer $a \in I$ (théorème 5.5). Pour $b \in B$ on a alors $bx = (ba)y \in I$. □

5.11 Proposition. *Soit A une algèbre de Banach possédant une unité approchée à gauche bornée. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- *(i) Il existe $a \in A$ tel que aA soit dense dans A.*
- *(ii) Il existe une partie dénombrable D de A tel que l'idéal à droite de A engendré par D soit dense dans A*
- *(iii) Il existe une suite d'éléments de A formant une unité approchée à gauche pour A.*
- *(iv) Pour toute unité approchée à gauche bornée $(u_i)_{i \in I}$ de A, il existe une suite i_n d'éléments de I, croissante si I est filtré par un ordre filtrant croissant, telle que la suite $v_n = u_{i_n}$ soit une unité approchée à gauche de A.*

Démonstration. (iv) $\Rightarrow$ (iii) résulte de ce que, par hypothèse, A possède une unité approchée à gauche bornée.

Supposons que la suite x_k soit une unité approchée de A. Alors l'idéal à gauche de A engendré par $\{ x_k \,,\ k \in \mathbb{N} \}$ est dense dans A, d'où (iii) $\Rightarrow$ (ii).

Soit D une partie dénombrable de A. En multipliant les éléments de D par des scalaires non nuls convenables, on peut supposer que les éléments de D forment une suite x_k telle que $\lim x_k = 0$. Par le corollaire 5.7, il existe $a \in A$ tel que l'idéal à droite de A engendré par D soit contenu dans aA, d'où (ii) $\Rightarrow$ (i).

Enfin, soient $(u_i)_{i \in I}$ une unité approchée à gauche bornée de A et $a \in A$. Il existe une suite i_n d'éléments de I, croissante si I est filtré par un ordre filtrant croissant, telle que $\|u_{i_n} a - a\| < 1/n$. La suite u_{i_n} étant bornée, $\{\, x \in A\,,\ \lim u_{i_n} x = x \,\}$ est un idéal à droite fermé dans A. Si aA est dense dans $A\,,\ u_{i_n}$ est une unité approchée à gauche de A. $\square$

5.12 Définition. Une algèbre de Banach est dite *σ-unifère* (*resp.* σ-unifère à gauche, à droite) si elle possède une unité approchée (*resp.* une unité approchée à gauche, à droite) formée d'une suite bornée.

5.13 Remarque. Par la remarque 5.2, une algèbre de Banach est σ-unifère si et seulement si elle est σ-unifère à gauche et à droite.

5.2 Multiplicateurs

5.14 Définition. Soient A et B des algèbres. On appelle *multiplicateur* d'un A-module à gauche (*resp.* à droite) E une application A-linéaire du A-module à gauche (*resp.* à droite) A dans E. On appelle multiplicateur d'un (A, B)-bimodule E une paire d'applications $\gamma : B \to E$ et $\delta : A \to E$ telles que pour tout $a \in A\,,\ b \in B$ on ait $a\gamma(b) = \delta(a)b$.

Soient A une algèbre et E un A-module à gauche (*resp.* à droite). L'ensemble des multiplicateurs de E est donc $\mathrm{Hom}_A({}_\gamma A, E)$ (*resp.* $\mathrm{Hom}_A(A_\delta, E)$) où ${}_\gamma A$ (*resp.* A_δ) désigne le A-module à gauche (*resp.* à droite) A. Pour tout $x \in E$ l'application $a \mapsto ax$ (*resp.* $x \mapsto xa$) est un multiplicateur noté δ_x (*resp.* γ_x) de E. Soient T un multiplicateur de E et $a \in A$. Posons $aT = \delta_{T(a)}$ (*resp.* $Ta = \gamma_{T(a)}$). On munit ainsi l'ensemble des multiplicateurs de E d'une structure de A-module à gauche (*resp.* à droite), pour laquelle l'application $x \mapsto \delta_x$ (*resp.* $x \mapsto \gamma_x$) est un morphisme de modules, appelé morphisme canonique.

Soient A et B deux algèbres et E un (A, B)-bimodule. Pour $x \in E$ posons $m_x = (\gamma_x, \delta_x)$ où γ_x et δ_x sont respectivement le multiplicateur du B-module E et du A-module E associés à x. La paire $m_x = (\gamma_x, \delta_x)$ est un multiplicateur du (A, B)-bimodule E.

Le noyau de l'application $x \mapsto \delta_x$ (*resp.* $x \mapsto \gamma_x$) est $\{\, x \in E\,,\ xA = \{0\} \,\}$ (*resp.* $\{\, x \in E\,,\ Ax = \{0\} \,\}$). On dira que le A-module E est *non singulier* si l'application $x \mapsto \delta_x$ (*resp.* $x \mapsto \gamma_x$) est injective. Soit e une unité à droite (*resp.* à gauche) de A ; pour tout multiplicateur T de E et tout $a \in A$ on a $T(a) = aT(e)$ (*resp.* $T(a) = T(e)a$) de sorte que $T = \delta_{T(e)}$ (*resp.* $T = \gamma_{T(e)}$).

5.15 Proposition. *a) Soient A une algèbre et E un A-module à gauche (resp. à droite) non singulier. Alors tout multiplicateur de E est $\mathbb{C}$-linéaire.*

b) Soient A et B des algèbres, E un (A, B)-bimodule et $m = (\gamma, \delta)$ un multiplicateur de E. Si le A-module E (resp. le B-module E) est non singulier, l'application γ est un multiplicateur du B-module E (resp. δ est un multiplicateur du A-module E).

c) Soit A une algèbre de Banach possédant une unité approchée à gauche (resp. à droite) bornée. Alors tout multiplicateur d'un A-module banachique à droite (resp. à gauche) non dégénéré est linéaire et continu.

Démonstration. Soit T un multiplicateur de E. Pour tout $a, b \in A$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $aT(\lambda b) = T(\lambda ab) = \lambda aT(b)$ et donc $\delta_{T(\lambda b)} = \delta_{\lambda T(b)}$, d'où a).

Pour tout $a, a' \in A$, $b \in B$ on a $\delta(a+a')b = (a+a')\gamma(b) = (\delta(a)+\delta(a'))b$ et $\delta(aa')b = aa'\gamma(b) = a\delta(a')b$. Donc $\gamma_{\delta(a+a')} = \gamma_{\delta(a)+\delta(a')}$ et $\gamma_{\delta(aa')} = \gamma_{a\delta(a')}$, d'où b).

L'assertion c) est une reformulation du corollaire 5.8.

Les énoncés « *resp.* » s'en déduisent en remplaçant A et B par leur algèbre opposé. □

5.16 Définition. On appelle *multiplicateur à gauche* (*resp. à droite*) d'une algèbre A un multiplicateur du module à droite (resp à gauche) A. On appelle *multiplicateur de* A un multiplicateur du (A, A)-bimodule A.

5.17 Corollaire. *Soit A une algèbre de Banach possédant une unité approchée à gauche (resp. à droite) bornée. Alors pour tout multiplicateur (γ, δ) de A l'application γ (resp. δ) est continue.*

Démonstration. Si A possède une unité approchée à gauche $(u_i)_{i\in I}$, alors pour tout $a \in A$, $a = \lim(\delta_a(u_i))$ donc l'application $a \mapsto \delta_a$ est injective. Le corollaire découle donc de la prop. 5.15 b) et c). □

Un idéal bilatère I d'un anneau A est dit *essentiel* si les idéaux annulateurs du A-module à gauche et du A-module à droite I sont nuls.

5.18 Proposition. *Soit A une algèbre dans laquelle les application $a \mapsto \gamma_a$ et $a \mapsto \delta_a$ sont injectives.*

a) *Soient $m = (\gamma, \delta)$ et $m' = (\gamma', \delta')$ deux multiplicateurs de A et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $m + m' = (\gamma + \gamma', \delta + \delta')$, $\lambda m = (\lambda\gamma, \lambda\delta)$ et $mm' = (\gamma \circ \gamma', \delta' \circ \delta)$ sont des multiplicateurs de A.*

b) *Muni des opérations de a) l'ensemble des multiplicateurs de A est une algèbre unifère notée $\mathcal{M}(A)$.*

c) *L'application $a \mapsto m_a$ est un homomorphisme d'algèbres qui identifie A à un idéal bilatère essentiel de $\mathcal{M}(A)$.*

d) *Pour toute algèbre B contenant A comme idéal bilatère, il existe un unique homomorphisme d'algèbres $\pi : B \to \mathcal{M}(A)$ dont la restriction à A soit l'application $a \mapsto m_a$. Si A est un idéal essentiel de B alors π est injectif.*

Démonstration. a) est clair.

b) Soit E l'algèbre des applications linéaires de A dans A et notons $E^{(o)}$ l'algèbre opposée. Par a), l'ensemble $\mathcal{M}(A) = \{ (\gamma, \delta) \in E \times E^{(o)} , \forall a, b \in A , a\gamma(b) = \delta(a)b \}$ est une sous algèbre de $E \times E^{(o)}$. Remarquons que l'unité $(\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_A)$ de $E \times E^{(o)}$ est un multiplicateur (où id_A est l'application identique de A dans A).

c) L'application $a \mapsto m_a$ est injective par hypothèse et est clairement un homomorphisme d'algèbres. Soit $a \in A$ et $m = (\gamma, \delta)$ un multiplicateur. On a $mm_a = m_{\gamma(a)}$ et $m_a m = m_{\delta(a)}$. Si $mm_a = 0$ pour tout a alors $m_{\gamma(a)} = 0$ donc $\gamma(a) = 0$; il en résulte alors que pour tout $a, b \in A$, $\delta(a)b = a\gamma(b) = 0$, donc $\gamma_{\delta(a)} = 0$ et $\delta(a) = 0$ enfin $m = 0$.

d) Pour $b \in B$, posons $\gamma_b : a \mapsto ba$ et $\delta_b : a \mapsto ab$. Il est clair que l'application $\pi : b \mapsto (\gamma_b, \delta_b)$ est un homomorphisme $\pi : B \to \mathcal{M}(A)$ qui convient. Si π' est un autre homomorphisme ayant la même propriété, on a pour tout $b \in B$ et $a \in A$, $\pi'(b)m_a = \pi'(ba) = m_{ba} = \pi(ba) = \pi(b)m_a$. Comme l'idéal A de $\mathcal{M}(A)$ est essentiel, on a $\pi'(b) = \pi(b)$. □

Dans la suite on considère A comme plongée dans $\mathcal{M}(A)$ en identifiant $a \in A$ avec m_a.

Soit A une algèbre de Banach. L'algèbre $\mathcal{M}(A)$ est munie d'une topologie dite *topologie stricte* ou *topologie des multiplicateurs* : c'est la topologie la moins fine pour laquelle les applications $T \mapsto Ta$

et $T \mapsto aT$ de $\mathcal{M}(A)$ dans A sont continues. La famille $(u_i)_{i\in I}$ est une unité approchée de A si et seulement si u_i converge strictement vers 1. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une unité approchée de A et $T \in \mathcal{M}(A)$ un multiplicateur continu ; alors Tu_i converge strictement vers T. En particulier, si A possède une unité approchée bornée, A est dense dans $\mathcal{M}(A)$ pour la topologie des multiplicateurs.

5.19 Proposition. *Soit $\pi : A \to B$ un homomorphisme d'algèbres de Banach. On suppose que A possède une unité approchée bornée et que B considéré comme A-module à gauche et à droite est non dégénéré. Alors π admet un unique prolongement en un homomorphisme $\Pi : \mathcal{M}(A) \to \mathcal{M}(B)$. Cet homomorphisme est strictement continu.*

Démonstration. Par le corollaire 5.9, l'opération à gauche (*resp.* à droite) de A dans B se prolonge de manière unique en une opération de $\mathcal{M}(A)$. Pour $T \in \mathcal{M}(A)$, notons $\gamma_T : B \to B$ et $\delta_T : B \to B$ les opérations ainsi définies. Soient $x, y \in B$; d'après le théorème 5.5, il existe $a, b \in A$ et $x', y' \in B$ tels que $x = x'\pi(a)$ et $y = \pi(b)y'$. Alors $x\gamma_T(y) = x'\pi(aTb)y' = \delta_T(x)y$; donc (γ_T, δ_T) est un multiplicateur de B ; notons le $\Pi(T)$. De plus, les applications $T \mapsto \pi(Tb)$ et $T \mapsto \pi(aT)$ sont continues, donc les applications $T \mapsto \Pi(T)y = \pi(Tb)y'$ et $T \mapsto x\Pi(T) = x'\pi(aT)$ sont continues. Enfin, l'image par π d'une unité approchée de A est une unité approchée de B, donc B est un idéal essentiel de $\mathcal{M}(B)$ (prop. 5.18.c) ; si $\Pi' : \mathcal{M}(A) \to \mathcal{M}(B)$ est une autre extension, on a $\Pi'(T)y = \pi(Tb)y'$, donc $\Pi(T) = \Pi'(T)$. □

5.3 Multiplicateurs des C^*-algèbres

5.20 Proposition. *Soit A une algèbre de Banach involutive possédant une unité approchée bornée et notons $\pi : A \to C^*(A)$ l'homomorphisme canonique. Alors π admet un unique prolongement en un homomorphisme $\Pi : \mathcal{M}(A) \to \mathcal{M}(C^*(A))$.*

Démonstration. Comme $\pi(A)$ est dense dans $C^*(A)$, le A-module à gauche (*resp.* à droite) $C^*(A)$ est non dégénéré. La proposition résulte donc de la prop. 5.19. □

Soit a un élément d'une C^*-algèbre A. Notons $m_a = (\gamma_a, \delta_a)$ le multiplicateur de A associé.

5.21 Proposition. *Soit A une C^*-algèbre.*

a) Soit $T = (\gamma, \delta)$ un multiplicateur de A. Alors $\|\gamma\| = \|\delta\|$ et $T^* = (\delta^*, \gamma^*)$ est un multiplicateur où pour tout $a \in A$, $\gamma^*(a) = \gamma(a^*)^*$ et $\delta^*(a) = \delta(a^*)^*$.

b) Muni de l'involution ci-dessus et de la norme $\|(\gamma, \delta)\| = \|\gamma\| (= \|\delta\|)$, l'algèbre $\mathcal{M}(A)$ est une C^*-algèbre.

c) L'inclusion de A dans $\mathcal{M}(A)$ est un homomorphisme involutif isométrique.

d) Soit B une C^*-algèbre contenant A comme idéal bilatère. L'homomorphisme associé de B dans $\mathcal{M}(A)$ (prop. 5.18.d) est un homomorphisme involutif.

Démonstration. a) On a $\|\gamma\| = \sup\{\, \|a\gamma(b)\|\,,\ a, b \in A\,,\ \|a\| \leqslant 1\,,\ \|b\| \leqslant 1\,\} = \sup\{\, \|\delta(a)b\|\,,\ a, b \in A\,,\ \|a\| \leqslant 1\,,\ \|b\| \leqslant 1\,\} = \|\delta\|$. La deuxième assertion est claire.

b) Soit E l'algèbre de Banach des applications linéaires continues de A dans A et notons $E^{(0)}$ l'algèbre de Banach opposée. Il est clair que $\mathcal{M}(A) = \{\, (\gamma, \delta) \in E \times E^{(0)}\,,\ \forall a, b \in A\,,\ a\gamma(b) = \delta(a)b\,\}$ est fermé dans $E \times E^{(0)}$. Il s'ensuit que $\mathcal{M}(A)$ est une algèbre de Banach. Soit $T = (\gamma, \delta) \in \mathcal{M}(A)$; pour tout $a \in A$ on a $\gamma(a)^*\gamma(a) = \gamma^*(a^*)\gamma(a) = a^*\delta^* \circ \gamma(a)$ (par b) et $\|\gamma(a)\|^2 \leqslant \|a\|^2\|\delta^* \circ \gamma\|$ de sorte que $\|T\|^2 = \|\gamma\|^2 = \sup\{\, \|\gamma(a)\|^2\,,\ a \in A\,,\ \|a\| \leqslant 1\,\} \leqslant \|\delta^* \circ \gamma\| = \|T^*T\|$; donc $\mathcal{M}(A)$ est une C^*-algèbre.

d) est clair.

c) Il résulte de d) appliqué à $B = A$ que l'inclusion de A dans $\mathcal{M}(A)$ est un homomorphisme involutif, qui est injectif comme $\|\delta_a(a^*)\| = \|a\|^2$, donc isométrique (prop. 3.14.b). $\square$

5.22 Exemple. Soit X un espace localement compact. La C^*-algèbre $C_0(X)$ des fonctions complexes continues sur X tendant vers 0 à l'infini est un idéal bilatère fermé dans la C^*-algèbre $C_b(X)$ des fonctions complexes continues bornées sur X. Soient $x \in X$ et $T \in \mathcal{M}(C_0(X))$. Comme l'ensemble $J_x = \{ f \in C_0(X)\,,\ f(x) = 0 \}$ est un idéal de $C_0(X)$ donc de $\mathcal{M}(C_0(X))$ (corollaire 5.10), le nombre $(Tf)(x)$ ne dépend pas de $f \in C_0(X)$ telle que $f(x) = 1$; notons le $T(x)$. L'application qui à T associe $T(x)$ est un homomorphisme de C^*-algèbres ; en particulier $|T(x)| \leqslant \|T\|$. Comme pour tout $f \in C_0(X)$ et tout $x \in X$, on a $T(x)f(x) = (Tf)(x)$, l'application $x \mapsto T(x)$ est continue. On a donc construit un homomorphisme $f : \mathcal{M}(C_0(X)) \to C_b(X)$ qui à T associe l'application $x \mapsto T(x)$. La restriction de cet homomorphisme à $C_0(X)$ est l'identité. Par la prop. 5.18.d), on a aussi un homomorphisme injectif $\pi : C_b(X) \to \mathcal{M}(C_0(X))$ et par l'unicité dans la prop. 5.18.d), $\pi \circ f$ est l'identité de $\mathcal{M}(C_0(X))$. Donc π et f sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. Autrement dit $\mathcal{M}(C_0(X))$ s'identifie à $C_b(X)$.

Soit A une C^*-algèbre. L'ensemble ordonné $\Lambda = \{ a \in A_+\,,\ \|a\| < 1 \}$ est une unité approchée de A. Pour tout $T \in \mathcal{M}(A)$, il est clair que $(aTa)_{a\in\Lambda}$ converge strictement vers T, de sorte que la boule unité de A est strictement dense dans celle de $\mathcal{M}(A)$ et A_+ est strictement dense dans $\mathcal{M}(A)_+$.

6 Représentations des C*-algèbres

6.1 Définitions et notations

Soient A une algèbre involutive et H un espace hilbertien. Une *représentation* de A dans H est un homomorphisme d'algèbres involutives $\pi : A \to \mathcal{L}(H)$. Autrement dit, π est une application linéaire telle que, pour tout $x, y \in A$ on ait

$$\pi(x^*) = \pi(x)^* \ \text{ et } \ \pi(xy) = \pi(x)\pi(y)\,.$$

L'espace H s'appelle *espace de la représentation* π et se note parfois H_π.

Soit π une représentation de A. Un sous-espace de H_π est dit *stable* par π s'il est invariant par les opérateurs $\pi(x)\,,\ x \in A$. Soit F un sous-espace de H_π stable par π alors l'adhérence de F dans H_π et l'orthogonal $F^\perp$ de F dans H_π sont stables par π ; en effet si $a \in A\,,\ x \in F^\perp$ et $y \in F$ on a $\langle y, \pi(a)x\rangle = \langle \pi(a^*)y, x\rangle = 0$.

Soit F un sous-espace fermé de H_π stable par π. L'application π_F qui à $x \in A$ associe la restriction de $\pi(x)$ à F est alors une représentation de A dans F appelée *sous-représentation* de π associée à F.

Soit $(H_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces hilbertiens. La somme hilbertienne des espaces hilbertiens H_i est l'ensemble des $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} H_i$ tels que la famille $(\langle x_i, x_i\rangle)_{i\in I}$ soit sommable. Le produit scalaire tel que $\langle (x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}\rangle = \sum_{i\in I} \langle x_i, y_i\rangle$ en fait un espace hilbertien.

Soit $(\pi_i)_{i\in I}$ une famille de représentations d'une algèbre involutive A. Notons $H_i = H_{\pi_i}$ l'espace de la représentation π_i et $H = \bigoplus_{i\in I} H_i$ la somme hilbertienne des espaces hilbertiens H_i. Supposons que pour tout $a \in A$ l'ensemble $\{\|\pi_i(a)\|\,,\ i \in I\}$ soit borné (c'est le cas si A est une algèbre de Banach involutive par la prop. 3.14.a)).

6.1 Proposition. *Avec les hypothèses et notations ci-dessus, il existe une (unique) représentation* π *de* A *dans la somme hilbertienne* $\bigoplus_{i\in I} H_i$ *telle que, pour tout* $a \in A$ *et tout* $(x_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} H_i$ *on ait* $\pi(a)((x_i)_{i\in I}) = (\pi_i(a)x_i)_{i\in I}$*. On a* $\|\pi(a)\| = \sup\{\,\|\pi_i(a)\|\,,\ i \in I\,\}$ *pour tout* $a \in A$*.*

Démonstration. Soit $a \in A$. Pour tout $(x_i)_{i\in I} \in \oplus_{i\in I} H_i$ et tout $i \in I$ on a $\langle \pi_i(a)x_i, \pi_i(a)x_i\rangle \leqslant \|\pi_i(a)\|^2\langle x_i, x_i\rangle$. Donc,

$$\sum_{i\in I}\langle \pi_i(a)x_i, \pi_i(a)x_i\rangle \leqslant \sup\{\,\|\pi_i(a)\|^2\,,\ i \in I\,\}\sum_{i\in I}\langle x_i, x_i\rangle\,.$$

Il en résulte que $(\pi_i(a)x_i)_{i\in I} \in \oplus_{i\in I} H_i$, que π est bien définie et que $\|\pi(a)\| \leqslant \sup\{\,\|\pi_i(a)\|\,,\ i \in I\,\}$. Il est clair que π est une représentation.

Enfin, soit $j \in I$ et $x \in H_j\,,\ \|x\| \leqslant 1$. Définissons $(y_i)_{i\in I} \in \oplus_{i\in I} H_i$ en posant $y_j = x$ et $y_i = 0$ si $i \neq j$. On a $\|(y_i)_{i\in I}\| = \|x\|$ et $\|\pi(a)(y_i)_{i\in I}\| = \|\pi_j(a)x\|$ donc $\|\pi(a)\| \geqslant \sup\{\,\|\pi_j(a)x\|\,,\ j \in I\,,\ x \in H_j\,,\ \|x\| \leqslant 1\,\}$. □

La représentation π ainsi définie est appelée *somme directe des représentations* π_i et notée $\bigoplus_{i\in I} \pi_i$.

6.2 Opérateurs d'entrelacement.

Si H est un espace hilbertien et X est un sous-ensemble de $\mathcal{L}(H)$, le *commutant* X' de X dans $\mathcal{L}(H)$ est $\{\,T \in \mathcal{L}(H)\,,\ \forall x \in X\,,\ Tx = xT\,\}$.

Soient π_1 et π_2 des représentations d'une algèbre involutive A. On appelle *opérateur d'entrelacement* de π_1 et π_2 tout opérateur $T \in \mathcal{L}(H_{\pi_1}, H_{\pi_2})$ tel que, pour tout $x \in A$, on ait $T\pi_1(x) = \pi_2(x)T$. On note $\mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_2)$ l'espace vectoriel des opérateurs d'entrelacement de π_1 et π_2. On appelle *commutant* de la représentation π l'espace $\mathrm{End}(\pi) = \mathrm{Hom}(\pi, \pi)$. C'est le commutant $\pi(A)'$ dans $\mathcal{L}(H_\pi)$ de la sous-algèbre $\pi(A)$.

6.2 Proposition. *Soient* $\pi_1\,,\ \pi_2$ *et* π_3 *des représentations d'une algèbre involutive* A *dans des espaces hilbertiens* $H_1\,,\ H_2$ *et* H_3 *respectivement.*

- *a) Si* $T \in \mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_2)$ *alors* $T^* \in \mathrm{Hom}(\pi_2, \pi_1)$*. Si* $T \in \mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_2)$ *et* $S \in \mathrm{Hom}(\pi_2, \pi_3)$ *alors* $ST \in \mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_3)$*.*
- *b) Le sous-espace* $\mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_2)$ *de* $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ *est fermé pour la topologie faible.*
- *c) Le commutant de la représentation* π_1 *est une sous-*C^**-algèbre de* $\mathcal{L}(H_1)$*.*

Démonstration. b) $\mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_2) = \{T \in \mathcal{L}(H_1, H_2),\ \forall x \in H_2,\ \forall y \in H_1,\ \forall a \in A,\ \langle \pi_2(a^*)x, Ty\rangle = \langle x, T\pi_1(a)y\rangle\}$ donc est faiblement fermé.

a) est élémentaire et c) résulte de a) et b). □

6.3 Proposition. *Soient* π *une représentation d'une algèbre involutive* A *dans un espace hilbertien* H *et* E *un sous-espace fermé de* H*. Notons* $P \in \mathcal{L}(H)$ *le projecteur orthogonal d'image* E*. Alors* E *est stable par* π *si et seulement si* $P \in \mathrm{End}(\pi)$*.*

Démonstration. a) Remarquons que E est stable par un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$, si et seulement si $PTP = TP$, *i.e.* si $(1 - P)TP = 0$. Si $P \in \mathrm{End}(\pi)$, pour tout $T \in \pi(A)$, on a $PT = TP$, donc multipliant à droite par P on en déduit que E est stable par π.

Si E est stable par π, il en va de même pour $(1 - P)H = E^\perp$ donc, pour tout $T \in \pi(A)$, on a $(1 - P)TP = 0 = PT(1 - P)$, donc $TP = PTP = PT$. □

Deux représentations d'une algèbre involutive sont dites *équivalentes* si elles admettent un opérateur d'entrelacement unitaire.

Si F est un sous-espace fermé de H_π stable par π, alors π est équivalente à $\pi_F \oplus \pi_{F^\perp}$.

6.4 Proposition. *Soient π_1 et π_2 des représentations d'une algèbre involutive A et $T \in \mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_2)$.*

a) L'image (resp. l'image réciproque) par T d'un sous-espace de H_{π_1} (resp. H_{π_2}) stable par π_1 (resp. π_2) est stable par π_2 (resp. π_1).

b) L'adhérence de TH_{π_1} et $\ker T$ sont des sous-espaces de H_{π_1} stables par π_1 et π_2 respectivement.

c) Notons $T = u|T|$ la décomposition polaire de T. Alors $u \in \mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_2)$ et $|T| \in \mathrm{End}(\pi_1)$.

d) La restriction de π_1 à l'adhérence de $T^*H_{\pi_2}$ et celle de π_2 à l'adhérence de TH_{π_1} sont des représentations équivalentes.

Démonstration. a) est clair et b) résulte de a) et de ce que l'adhérence d'un sous-espace stable par une représentation est stable.

Par la prop. 6.2.a), $T^*T \in \mathrm{End}(\pi_1)$ donc par la prop. 6.2. c) $|T| \in \mathrm{End}(\pi_1)$. Par la prop. 3.24.e), u est limite forte d'une suite T_n d'éléments de $\mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_2)$, donc $u \in \mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_2)$ par la prop. 6.2. b), d'où c). Enfin, la restriction de u est un opérateur unitaire de l'adhérence de $T^*H_{\pi_2}$ sur celle de TH_{π_1} qui entrelace les restrictions de π_1 et π_2, d'où d). □

Deux représentations d'une algèbre involutive sont dites *disjointes* si elles n'admettent pas de sous-représentations équivalentes non nulles.

6.5 Corollaire. *Deux représentations sont disjointes si et seulement si elles n'admettent pas d'opérateur d'entrelacement non nul.*

Démonstration. Soient π_1 et π_2 des représentations de A. Si $T \in \mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_2)$ est non nul, π_1 et π_2 admettent des sous-représentations équivalentes non nulles par la prop. 6.4.d).

Si F_i est un sous-espace invariant de H_{π_i} stable par π_i ($i = 1, 2$) et $T \in \mathcal{L}(F_1, F_2)$ est un opérateur entrelaçant les restrictions de π_i, l'opérateur $S \in \mathcal{L}(H_{\pi_1}, H_{\pi_2})$ qui coïncide avec T sur F_1 et est nul sur $F_1^\perp$ entrelace π_1 et π_2, d'où la réciproque. □

6.3 Représentations cycliques

Soit π une représentation d'une algèbre involutive A. Pour tout sous-ensemble S de H_π, le sous-espace fermé de H_π engendré par $\{\,\pi(a)x\,,\ a \in A\,,\ x \in S\,\}$ est stable par π. On dit que le sous-ensemble S de H_π est *totalisateur* pour π si le sous-espace de H_π engendré par $\{\,\pi(a)x\,,\ a \in A\,,\ x \in S\,\}$ est dense dans H_π. Un vecteur $x \in H_\pi$ est dit *totalisateur* pour π si $\{x\}$ est totalisateur pour π. La représentation π est dite *non dégénérée* si H_π est totalisateur pour π. Cela signifie que le A-module H_π est non dégénéré (*cf.* p. 30).

Soient H un espace hilbertien et B une sous-algèbre de $\mathcal{L}(H)$. Un sous-ensemble S de H est dit *séparateur* pour B si l'application qui à $b \in B$ associe sa restriction à S est injective. Un vecteur $x \in H$ est dit *séparateur* pour B si $\{x\}$ est séparateur pour B.

6.6 Proposition. *Soient π une représentation non dégénérée d'une algèbre involutive A dans un espace hilbertien H. Un sous-ensemble S de H est totalisateur pour π si et seulement s'il est séparateur pour son commutant.*

Démonstration. Supposons S totalisateur pour π. Soit $b \in \pi(A)'$. Si b s'annule sur S, pour tout $a \in A$ et tout $x \in S$ on a $b\pi(a)x = \pi(a)bx = 0$ donc $b = 0$.

Réciproquement, soit E l'adhérence dans H du sous-espace vectoriel engendré par $\{\,\pi(a)x\,,\ a \in A\,,\ x \in S\,\}$ et notons P le projecteur orthogonal de H d'image E. Alors $P \in \pi(A)'$ (prop. 6.3.) et pour tout $x \in S$, $Px = x$; si S est séparateur pour $\pi(A)'$, $P = 1$, donc $E = H$ et S est totalisateur pour π. □

6.7 Définition. Une représentation d'une algèbre involutive est dite *cyclique* si elle admet un vecteur totalisateur.

6.8 Corollaire. *La somme de deux représentations cycliques disjointes est cyclique. La somme d'une suite de représentations cycliques disjointes deux à deux est cyclique.*

Démonstration. Soient (π_n) une suite de représentations cycliques disjointes deux à deux. Par le corollaire 6.5, le commutant de $\bigoplus_n \pi_n$ est le produit ℓ^∞ des $\mathrm{End}(\pi_n)$. Or, si $x_n \in H_{\pi_n}$ est séparateur pour $\mathrm{End}(\pi_i)$ ($i = 1, 2$) et, alors $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{1+n\|x_n\|} x_n \in \bigoplus_n H_{\pi_n}$ est séparateur pour $\mathrm{End}(\bigoplus_n \pi_n)$. □

6.9 Proposition. *Toute sous-représentation d'une représentation cyclique d'une algèbre involutive est cyclique.*

Démonstration. Soit x un vecteur totalisateur pour la représentation π d'une algèbre involutive A. Soit E un sous-espace de H_π stable par π et P le projecteur orthogonal d'image E. Alors $P\pi(A)x = \pi(A)Px$ est dense dans E donc Px est totalisateur pour π. □

6.10 Lemme. *a) Soient H un espace hilbertien et $P_1, P_2 \in \mathcal{L}(H)$ deux projecteurs orthogonaux d'images respectives E_1 et E_2. L'adhérence dans H de l'image de $(1-P_2)P_1$ est l'orthogonal de E_1 dans le sous-espace fermé F engendré par E_1 et E_2.*

b) Soient π une représentation d'une algèbre involutive A et E_i, $i = 1, 2$ des sous-espaces de H_π stables par π. Notons F le sous-espace fermé engendré par E_1 et E_2. Alors les restrictions de π à l'orthogonal de E_1 dans F et à l'orthogonal de $E_1 \cap E_2$ dans E_2 sont équivalentes.

Démonstration. a) L'adhérence E de l'image de $(1-P_1)P_2$ est l'orthogonal du noyau de son adjoint $P_1(1-P_2)$; ce noyau contient E_2 et son intersection avec l'orthogonal $E_2^\perp$ de E_2 est $E_1^\perp \cap E_2^\perp$. Donc $E = E_2^\perp \cap (E_1^\perp \cap E_1^\perp)^\perp = E_2^\perp \cap F$, puisque $F^\perp = E_1^\perp \cap E_2^\perp$.

b) Notons P_1 et P_2 les projecteurs orthogonaux de H_π d'images respectives E_1 et E_2. Posons $T = (1-P_1)P_2$. Par a) l'adhérence de $\operatorname{im} T$ est $E_1^\perp \cap F$ et comme l'espace fermé engendré par $E_1^\perp$ et $E_2^\perp$ est $(E_1 \cap E_2)^\perp$, l'adhérence de $\operatorname{im} T^*$ est $E_2 \cap (E_1 \cap E_2)^\perp$. Comme $T \in \mathrm{End}(\pi)$, les restrictions de π à ces sous-espaces sont équivalentes par la prop. 6.4.d). □

6.11 Proposition. *Soit π une représentation non dégénérée d'une algèbre involutive A et S un sous-ensemble de H_π totalisateur pour π. Il existe une famille totale $(E_x)_{x\in S}$ de sous-espaces fermés deux à deux orthogonaux de H_π stables par π telle que pour tout $x \in S$ la restriction π_x de π à E_x est équivalente à une sous-représentation de la restriction de π à l'adhérence de $\pi(A)x$.*

Démonstration. Pour une partie T de H_π notons F_T le sous-espace fermé engendré par $\pi(A)T$. Munissons S d'un bon ordre. Pour $x \in S$, notons E_x l'orthogonal dans $F_{\{x'\in S,\ x'\leqslant x\}}$ de $F_{\{x'\in S,\ x'<x\}}$. Par le lemme 6.10.b), la restriction de π à E_x est équivalente à une sous représentation de $F_{\{x\}}$. Par récurrence transfinie, pour toute partie commençante J de S, le sous-espace fermé de H_π engendré par E_x, $x \in J$ est F_J. Donc les E_x sont deux à deux orthogonaux de somme H_π. □

6.12 Corollaire. *Toute représentation non dégénérée d'une algèbre involutive est somme directe de représentations cycliques.* □

6.4 Formes positives et représentations

6.13 Définition. Une forme linéaire f sur une C^*-algèbre$A$ est dite *positive* si $f(A_+) \subset \mathbb{R}_+$.

Soient H un espace hilbertien et $B = \mathcal{L}(H)$ la C^*-algèbre des endomorphismes continus de H. Pour tout $x \in H$, la forme linéaire $f_x : T \mapsto \langle x, Tx\rangle$ est positive sur B car $f_x(T^*T) = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2$. Soient A une C^*-algèbre et $\pi : A \to B$ une représentation. Il est clair que la forme $f_x \circ \pi$ est positive sur A. Nous allons montrer que toute forme positive est de cette forme.

Soit f une forme linéaire positive sur une C^*-algèbre A. Pour $a, b \in A$ posons $\langle a, b\rangle_f = f(a^*b)$. Pour tout $a \in A$, on a $f(a^*a) \geqslant 0$ donc la forme sesquilinéaire $\langle\ ,\ \rangle_f$ ainsi définie sur A est positive. On note H_f l'espace hilbertien séparé complété de l'espace préhilbertien $(A, \langle\ ,\ \rangle_f)$ et $\eta_f : A \to H_f$ l'application canonique de A dans son séparé complété. Par définition, pour tout $a, b \in A$ on a $\langle \eta_f(a), \eta_f(b)\rangle = f(a^*b)$.

6.14 Proposition. *Soit f une forme linéaire positive sur une C^*-algèbre A. Il existe une (unique) représentation involutive π_f de A dans l'espace hilbertien H_f telle que pour tout $a, b \in A$ on ait $\eta_f(ab) = \pi_f(a)\eta_f(b)$.*

Démonstration. Soit $a \in A$ tel que $\|a\| \leqslant 1$. Notons h l'application $s \mapsto 1 - (1-s)^{1/2}$ définie sur $\mathrm{Sp}\, a^*a \subset [0, 1]$. Posons $c = h(a^*a)$; c'est un élément hermitien de A et l'on a $(1-c)^2 + a^*a = 1$ (dans $\tilde{A}$). Pour tout $b \in A$, on a $(b - cb)^*(b - cb) + b^*a^*ab = b^*b$, donc

$$\|\eta_f(b)\|^2 = \|\eta_f(ab)\|^2 + \|\eta_f(b - cb)\|^2 .$$

En particulier, $\|\eta_f(ab)\| \leqslant \|\eta_f(b)\|$; l'application linéaire $b \mapsto \eta_f(ab)$ est donc continue de l'espace préhilbertien $(A, \langle\ ,\ \rangle_f)$ dans H_f donc s'étend en un opérateur $\pi_f(a)$ du séparé complété H_f dans H_f. Il est clair que l'application π_f ainsi définie est une représentation involutive. $\square$

Il en découle immédiatement que, si A est unifère, toute forme linéaire f positive sur A est continue et $\|f\| = f(1)$. En effet, posons $\xi_f = \eta_f(1)$. Par la prop. 3.14.a), on a $\|\pi_f(a)\| \leqslant \|a\|$ donc $|f(a)| \leqslant \|a\|\|\xi_f\|^2 = \|a\|f(1)$.

6.15 Proposition. *Soit A une C^*-algèbre. Notons Λ l'ensemble ordonné filtrant $\Lambda = \{\, x \in A_+\, ,\ \|x\| < 1\,\}$.*

a) Toute forme linéaire f positive sur A est continue et $\lim\limits_{\Lambda}(f(a)) = \|f\|$.

b) Pour qu'une forme linéaire f sur A soit positive il faut et il suffit qu'elle soit continue et que $\sup\{\, \mathrm{Re}(f(a))\, ,\ a \in \Lambda\} = \|f\|$.

Démonstration. a) Soit a_n une suite d'éléments de A telle que $\lim a_n = 0$. Alors il existe des éléments $a, b \in A$ et des suites b_n et c_n dans A tels que $\lim b_n = \lim c_n = 0\,,\ a_n = ab_n$ et $b_n^* = b^*c_n^*$ pour tout n (on applique deux fois le corollaire 5.7). On a donc $a_n = ac_nb$ et, avec les notations de la prop 1, $f(a_n) = \langle \eta_f(a^*), \pi_f(c_n)\eta_f(b)\rangle$ et $|f(a_n)| \leqslant \|\eta_f(a^*)\|\|c_n\|\|\eta_f(b)\|$. Donc $\lim f(a_n) = 0$, d'où la continuité de f.
Soit $x \in A$ tel que $\|x\| < 1$. Pour tout $a \in \Lambda$, on a $f(ax) = \langle \eta(a), \eta(x)\rangle$, donc $|f(ax)|^2 \leqslant \|\eta(a)\|^2\|\eta(x)\|^2 = f(a^2)f(x^*x) \leqslant \sup\{f(a),\ a \in \Lambda\}^2$ (vu que $a^2 \in \Lambda$ et $x^*x \in \Lambda$). Or $f(x) = \lim\limits_{\Lambda} f(ax)$, donc $\|f\| \leqslant \sup\{f(a),\ a \in \Lambda\}$. Comme f est croissante de Λ dans $\mathbb{R}_+$, on a $\sup\{f(a),\ a \in \Lambda\} = \lim\limits_{\Lambda}(f(a))$.

b) Si f est positive alors elle est continue et $\sup\{\mathrm{Re}(f(x)),\ x\in\Lambda\}=\|f\|$ par a).

Inversement supposons que f est continue et que $\sup\{\mathrm{Re}(f(x)),\ x\in\Lambda\}=\|f\|$.

Soit $x\in A_+$ tel que $\|x\|\leqslant 1$. Alors pour tout $y\in\Lambda$, $\|y-x\|\leqslant 1$, d'où l'on déduit que $\sup\{\mathrm{Re}(f(y)-f(x)),\ y\in\Lambda\}\leqslant\|f\|$ *i.e.* $\|f\|-\mathrm{Re}f(x)\leqslant\|f\|$ donc $\mathrm{Re}f(x)\geqslant 0$. Il s'ensuit que l'application $x\mapsto\mathrm{Re}(f(x))$ est croissante de l'ensemble ordonné filtrant Λ dans $\mathbb{R}_+$, donc $\lim\limits_{\Lambda}\mathrm{Re}(f(x))=\|f\|$.

Pour conclure, il suffit de montrer que f est hermitienne. Soit h un élément hermitien de A; écrivons $f(h)=a+ib$ avec $a,b\in\mathbb{R}$. Pour tout nombre réel t et tout $x\in\Lambda$ on a :

$$\|x+ith\|^2=\|x^2+t^2h^2+it(xh-hx)\|\leqslant 1+t^2\|h^2\|+|t|\|xh-hx\|$$

Or $\lim\limits_{\Lambda}xh=\lim\limits_{\Lambda}hx=h$ donc $\lim\limits_{\Lambda}\|xh-hx\|=0$ et $\limsup\limits_{\Lambda}\|x+ith\|^2\leqslant 1+t^2\|h^2\|$.

Enfin, $\lim\limits_{\Lambda}\mathrm{Re}f(x+ith)=\|f\|-tb$. On a donc $(\|f\|-tb)^2\leqslant\|f\|(1+t^2\|h^2\|)$. Ceci ayant lieu pour tout t, on trouve $b=0$, *i.e.* $f(h)$ est réel. □

6.16 Proposition. *Soient A une C^*-algèbre et f une forme linéaire positive sur A. Il existe un vecteur $\xi_f\in H_f$ tel que $\|\xi_f\|^2=\|f\|$ et pour tout $x\in A$ on ait $\eta_f(x)=\pi_f(x)\xi_f$ et $f(x)=\langle\xi_f,\pi_f(x)\xi_f\rangle$.*

Démonstration. Soient $a,b\in\Lambda$ tels que $b\geqslant a$; on a $(b-a)^2\leqslant b-a$ donc $\|\eta_f(b)-\eta_f(a)\|^2=f((b-a)^2)\leqslant f(b)-f(a)\leqslant\|f\|-f(a)$. Il s'ensuit immédiatement que la famille $(\eta_f(a))_{a\in\Lambda}$ converge. Soit ξ_f sa limite. Pour tout $x\in A$ on a

$$\eta_f(x)=\lim_{\Lambda}\ \eta_f(xa)=\lim_{\Lambda}\ \pi_f(x)\eta_f(a)=\pi_f(x)\xi_f$$

et

$$f(x)=\lim_{\Lambda}\ f(ax)=\lim_{\Lambda}\langle\eta_f(a),\pi_f(x)\xi_f\rangle=\langle\xi_f,\pi_f(x)\xi_f\rangle\,.$$

Cette dernière égalité montre que $\|f\|\leqslant\|\xi_f\|^2$; enfin, $\|\xi_f\|^2=\lim\limits_{\Lambda}f(a^2)\leqslant\|f\|$. □

Le triplet (H_f,π_f,ξ_f) s'appelle construction de Gel'fand-Naimark-Segal associée à la forme f.

6.17 Corollaire. *Toute forme linéaire positive f sur une C^*-algèbre A admet une unique extension en une forme positive strictement continue sur l'algèbre des multiplicateurs $\mathcal{M}(A)$.*

Démonstration. Étendons la représentation π_f en une représentation π de $\mathcal{M}(A)$. Alors, la forme $x\mapsto\langle\xi_f,\pi(x)\xi_f\rangle$ convient. L'unicité résulte de la densité stricte de A dans $\mathcal{M}(A)$. □

Soient π une représentation d'une algèbre involutive A et $x\in H_\pi$ un vecteur totalisateur. Notons f la forme $a\mapsto\langle x,\pi(a)x\rangle$ de A. Notons η_f l'application canonique de A dans son séparé complété H_f pour le produit scalaire $(a,b)\mapsto f(a^*b)$. Pour $a,b\in A$, on a $\langle\pi(a)x,\pi(b)x\rangle=f(a^*b)=\langle\eta_f(a),\eta_f(b)\rangle$. Comme les espaces $\pi(A)x$ et $\eta_f(A)$ sont denses dans H et H_f respectivement, il existe un (unique) opérateur unitaire $U\in\mathcal{L}(H,H_f)$ tel que $U(\pi(a)x)=\eta_f(a)$ pour tout $a\in A$. Notons alors π_f la représentation de A dans H_f donnée par $\pi_f(a)=U\pi(a)U^*$. Le triple (H_f,π_f,Ux) est clairement la construction de Gel'fand-Naimark-Segal associée à la forme f.

En particulier, une représentation est cyclique si et seulement si elle est équivalente à une représentation de Gel'fand-Naimark-Segal ; une représentation non dégénérée est somme de représentations de Gel'fand-Naimark-Segal.

Soit A une C^*-algèbre. On note A_h l'espace de Banach réel ordonné des éléments hermitiens de A.

6.18 Proposition. *Soit X l'espace compact des formes linéaires positives sur A de norme $\leqslant 1$, muni de la convergence faible. L'application F qui à $a \in A_h$ associe la fonction $f \mapsto f(a)$ est un isomorphisme isométrique de l'espace de Banach ordonné A_h sur un sous-espace de l'espace de Banach ordonné des fonctions continues réelles sur X.*

Démonstration. Il est clair que F est linéaire. Comme A_+ est un cône convexe fermé de A_h le théorème des bipolaires montre que $a \in A_+ \iff F(a) \geqslant 0$. Montrons enfin que F est isométrique. Soit a un élément non nul de A_h ; posons $a^+ = f(a)$ où $f : t \mapsto \sup(0, t)$ et $a^- = a^+ - a$; quitte à changer a en $-a$, on peut supposer que $\|a^-\| \leqslant \|a^+\|$ *i.e.* que $\|a\| = \|a^+\|$. Soit f une forme linéaire continue sur A telle que $\|f\| = 1$ et $f(a^+) = \|a\|$. Il résulte de la prop. 6.15.b) que $f \in X$; comme $a^+ \leqslant |a|$, il en résulte que $f(|a|) \geqslant \|a\|$, donc $f(|a|) = \|a\|$ et comme $a = 2a^+ - |a|$, $f(a) = \|a\|$, d'où le résultat. □

Remarque. — Soit $x \in A$; écrivons $x = h + ik$ avec h et k hermitiens. Pour tout $f \in X$, $f(h)$ et $f(k)$ sont réels, donc $|f(x)| \geqslant |f(h)|$ et $|f(x)| \geqslant |f(k)|$. Donc

$$\|x\| \leqslant \|h\| + \|k\| = \sup\{\, |f(h)|\,,\ f \in X\,\} + \sup\{\, |f(k)|\,,\ f \in X\,\} \leqslant 2 \sup\{\, |f(x)|\,,\ f \in X\,\}\,.$$

Cette inégalité est optimale comme le montre l'exemple $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

6.19 Corollaire. *Soit f une forme linéaire continue hermitienne sur A. Il existe alors des formes positives f^+ et f^- sur A telles que $f = f^+ - f^-$ et $\|f\| = \|f^+\| + \|f^-\|$.*

Démonstration. Identifions A_h à un sous espace de $C(X)$ avec les notations de la prop. 6.18. D'après le théorème de Hahn Banach, la restriction de f à A_h se prolonge en une forme linéaire continue hermitienne μ sur $C(X)$, de même norme que f. La mesure μ sur X s'écrit sous la forme $\mu^+ - \mu^-$ avec μ^+ et μ^- positives et $\|\mu\| = \|\mu^+\| + \|\mu^-\|$. Il suffit alors de prendre pour f^+ (*resp.* f^-) la restriction à A_h de μ^+ (*resp.* μ^-). □

Remarque. — Soit f une forme linéaire continue hermitienne sur A. Il existe alors un unique couple (f^+, f^-) de formes positives sur A telles que $f = f^+ - f^-$ et $\|f\| = \|f^+\| + \|f^-\|$ (*cf.* exerc. **??**).

6.20 Corollaire. *Pour tout $x \in A$ il existe une représentation π de A dans un espace hilbertien telle que $\|\pi(x)\| = \|x\|$.*

Démonstration. Par la prop. 6.18, il existe une forme linéaire positive f sur A telle que $\|f\| \leqslant 1$ et $f(x^*x) = \|x\|^2$. Soit (H_f, π_f, ξ_f) la construction de Gel'fand-Naimark-Segal associée à la forme f. Par la prop. 6.2, $\|\xi_f\|^2 = \|f\| \leqslant 1$. Alors $\|\pi_f(x)\| \geqslant \|\pi_f(x)\xi_f\|^2 = f(x^*x) = \|x\|^2$. L'inégalité dans l'autre sens résulte de la prop. 3.14.a). □

6.21 Théorème. *Toute C^*-algèbre admet une représentation isométrique dans un espace hilbertien.*

Démonstration. Soit A une C^*-algèbre. Par corollaire 6.20, pour tout $a \in A$ il existe une représentation π_a telle que $\|\pi_a(a)\| = \|a\|$. La représentation $\bigoplus_{a \in A} \pi_a$ est alors isométrique par les prop. 3.14.a) et 6.1. □

Si la C^*-algèbre A est séparable, on a de plus :

6.22 Proposition. *Soit A une C^*-algèbre séparable.*

a) Il existe une forme linéaire positive f sur A telle que $\{\, a \in A\,,\ f(a^*a) = 0\,\} = \{0\}$.

b) Il existe une représentation isométrique de A dans un espace hilbertien séparable.

Une forme positive f est dite *fidèle* si $\{ a \in A\,,\ f(a^*a) = 0 \} = \{0\}$.

Démonstration. a) Soit (a_n) une suite d'éléments de A, dense dans A et, pour tout n, soit f_n une forme linéaire positive sur A telle que $f_n(a_n^*a_n) = \|a_n\|^2$ et $\|f_n\| = 1$ (prop. 6.18). Notons $(H_{f_n}, \pi_{f_n}, \xi_{f_n})$ la construction de Gel'fand-Naimark-Segal associée et posons $f = \sum_n 2^{-n} f_n$. Soit $a \in A$, $a \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|a - a_n\| < \|a\|/2$, donc $\|a - a_n\| < \|a_n\|$. On a alors, $\|\pi_{f_n}(a)\xi_{f_n}\| \geqslant \|\pi_{f_n}(a_n)\xi_{f_n}\| - \|a - a_n\| = \|a_n\| - \|a - a_n\| > 0$, donc $f_n(a^*a) = \|\pi_{f_n}(a)\xi_{f_n}\|^2 > 0$ et, comme $f(a^*a) \geqslant 2^{-n} f_n(a^*a)\,,\ f(a^*a) \neq 0$.

b) Soit f une forme positive fidèle et notons (H_f, π_f, ξ_f) la construction de Gel'fand-Naimark-Segal associée. Pour tout $a \in A\,,\ a \neq 0$, on a $\langle \pi_f(a)\xi_f, \pi_f(a)\xi_f \rangle = f(a^*a) \neq 0$ donc $\pi_f(a) \neq 0$. L'homomorphisme de C^*-algèbres $\pi_f : A \to \mathcal{L}(H_f)$ est injectif donc isométrique par la prop. 3.14.b). □

6.23 Proposition. *Soient π une représentation d'une C^*-algèbre A dans un espace hilbertien H et $x \in H$; notons f la forme positive $a \mapsto \langle x, \pi(a)x \rangle$.*

a) Pour tout $T \in \mathrm{End}(\pi)_+$ tel que $T \leqslant 1$ la forme $f_T : a \mapsto \langle x, \pi(a)x \rangle$ est positive sur A et est majorée par f i.e. $f - f_T$ est positive.

b) Toute forme positive majorée par f est de la forme f_T.

c) Si x est totalisateur pour π, l'application $T \mapsto f_T$ est injective.

Démonstration. a) On a $f_T(a) = \langle T^{1/2}x, \pi(a)T^{1/2}x \rangle$ donc f_T est positive. Il en résulte que $f - f_T = f_{1-T}$ est positive.

b) Soit g une forme positive majorée par f et soit (H_g, π_g, ξ_g) la construction de Gel'fand-Naimark-Segal associée à g. Pour tout $a \in A$, on a $\|\pi_g(a)\xi_g\|^2 = g(a^*a) \leqslant f(a^*a) = \|\pi(a)x\|^2$, donc il existe une unique application linéaire continue $S \in \mathcal{L}(H_\pi, H_g)$ telle que pour tout $a \in A$ on ait $S\pi(a)x = \pi_g(a)\xi_g$ et, pour tout $y \in H_\pi$, orthogonal à $\pi(A)x$, $Sy = 0$. Alors $\|S\| \leqslant 1$. Soient $a, b \in A$ et $y \in H_\pi$, orthogonal à $\pi(A)x$; posons $z = \pi(b)x + y$ comme $\pi(a)y$ est orthogonal à $\pi(A)x$, on a $S\pi(a)z = \pi_g(ab)\xi_g = \pi_g(a)Sz$. Donc $S \in \mathrm{Hom}(\pi, \pi_g)$ et, pour tout $a \in A$, on a $g(a) = \langle Sx, \pi_g(a)Sx \rangle = \langle x, \pi(a)S^*Sx \rangle$; donc $g = f_{S^*S}$.

c) Pour tout $a, b \in A$, $\langle \pi(a)x, (T - S)\pi(b)x \rangle = f_T(a^*b) - f_S(a^*b)$. Si $f_T = f_S$ alors $(T - S)$ envoie $\pi(A)x$ dans son orthogonal. Si de plus x est totalisateur pour A, $T = S$. □

6.5 Représentations des C^*-algèbres commutatives

Soit $A = C(X)$ une C^*-algèbre commutative.

6.24 Remarque. Remarquons que $C(X)$ est séparable si et seulement s'il existe une suite f_n de fonctions positives sur X avec $\|f_n\|_\infty \leqslant 1$ engendrant $C(X)$ comme C^*-algèbre, *i.e.* qui séparent les points de X (d'après le théorème de Stone-Weierstrass). Cela a lieu si et seulement si X est homéomorphe à une partie fermée du compact $[0,1]^{\mathbb{N}}$ - soit si et seulement si X est métrisable.

On fixe donc un compact métrisable X.

On appelle *mesure de Radon* sur X une mesure positive borélienne finie (si X est localement compact, une mesure de Radon sur X une mesure borelienne finie sur ls compacts).

Soit μ une mesure de Radon sur X. L'application $f \mapsto \displaystyle\int_X f(x)d\mu(x) = \mu(f)$ est une forme linéaire positive sur X. Dans un sens, μ prolonge aux fonctions boréliennes cette forme linéaire.

Rappelons le théorème essentiel suivant :

6.25 Théorème (mesures de Radon)**.** *Pour toute forme linéaire positive sur $C(X)$ il existe une et une seule mesure (borélienne finie) qui la prolonge.* □

Soit μ une mesure de Radon (positive) sur X. On note $L^2(X,\mu)$ l'espace hilbertien des fonctions de carré intégrable sur X pour la mesure μ (modulo les fonctions μ-négligeables). Le produit scalaire sur $L^2(X,\mu)$ est donné par la formule $\langle \xi, \eta\rangle = \displaystyle\int_X \overline{\xi(t)}\eta(t)\, dt\,.$

Rappelons que l'image de $C(X)$ dans l'space $L^2(X,\mu)$ est un sous-espace dense de $L^2(X,\mu)$, de sorte que $L^2(X,\mu)$ s'identifie au séparé-complété de $C(X)$ muni du produit scalaire $(f,g) \mapsto \mu(\overline{f}\, g)$.

6.26 Proposition. *Soit μ une mesure de Radon sur X. Pour $f \in C(X)$ l'application $\xi \mapsto f\xi$ est un opérateur M_f sur $L^2(X,\mu)$.*

a) L'application $f \mapsto M_f$ est une représentation de $C(X)$ dans $L^2(X,\mu)$

b) L'action de $C(X)$ par multiplication dans $L^2(X,\mu)$ est une représentation que l'on notera M_μ.

□

6.27 Proposition. *Soient π une représentation de $C(X)$ dans un espace de Hilbert H et $\xi \in H$ un vecteur cyclique.*

- *L'application $f \mapsto \langle \xi, \pi(f)\xi\rangle$ est une mesure de Radon μ sur X.*
- *La représentation π est équivalente à M_μ.*

Démonstration. La première assertion est claire.

L'application $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_X \overline{f(t)}g(t)\, dt$ est un produit scalaire. Notons E l'espace préhilbertien $C(X)$ muni de ce produit scalaire. L'application $f \mapsto \pi(f)\xi$ est une isométrie de E dans H_π ; elle définit un opérateur unitaire U du séparé complété $L^2(X,\mu)$ de E sur l'adhérence H de $\pi(C(X))\xi$. Pour $f,g \in C(X)$ on a $U(fg) = \pi(fg)\xi = \pi(f)\pi(g)\xi = \pi(f)Ug$, d'où il résulte que U est un opérateur d'entrelacement. □

Calcul de $M_\mu(A)' = End(M_\mu)$

6.28 Proposition. *a) Soit $\varphi \in L^\infty(X,\mu)$. Il existe $\widetilde{M}_\mu(\varphi) \in End(M_\mu)$ telle que pour tout $\xi \in L^2(X,\mu)$ on ait $\widetilde{M}_\mu(\varphi)\xi = \varphi\xi$. De plus $\|\widetilde{M}_\mu(\varphi)\|$ est le sup essentiel $\|\varphi\|_\infty$ de φ pour la mesure μ.*

b) Inversement, pour tout $T \in End(M_\mu)$, il existe un unique $\varphi \in L^\infty(X,\mu)$ tel que $T = \widetilde{M}_\mu(\varphi)$.

Démonstration. a) Comme $|\varphi|$ est presque partout majoré par $\|\varphi\|_\infty$, on a $|\varphi\xi| \leqslant \|\varphi\|_\infty|\xi|$ presque partout, donc $\|\varphi\xi\|_2 \leqslant \|\varphi\|_\infty\|\xi\|_2$. On en déduit qu'il existe $\widetilde{M}_\mu(\varphi) \in \mathcal{L}(L^2(X,\mu))$ telle que $\widetilde{M}_\mu(\varphi)\xi = \varphi\xi$ et $\|\widetilde{M}_\mu(\varphi)\| \leqslant \|\varphi\|_\infty$.

Si $0 \leqslant t < \|\varphi\|_\infty$, posons ξ_t le fonction caractéristique de $\{x \in X;\ |\varphi(x)| \geqslant t\}$. Alors $\|\xi_t\|_2 \neq 0$ et $\|\varphi\xi_t\|_2 \geqslant t\|\xi_t\|_2$. On en déduit que $\|\widetilde{M}_\mu(\varphi)\| = \|\varphi\|_\infty$.

Enfin, il est clair que $\widetilde{M}_\mu(\varphi)$ entrelace M_μ.

b) Notons $1_\mu \in L^2(S,\mu)$ la classe de la fonction 1 et posons $\varphi = T1_\mu \in L^2(X,\mu)$.
Pour tout $f \in C(X)$, on a $T(f1_\mu) = fT(1_\mu) = f\varphi$, donc $\|f\varphi\|^2 \leqslant \|T\|^2\|f1_\mu\|^2$, de sorte que la mesure $(\|T\|^2 - |\varphi|^2)\mu$ est positive. On en déduit que $\varphi \in L^\infty(X,\mu)$ et $\|\varphi\|_\infty \leqslant \|T\|$. Par densité de $C(X)1_\mu$ dans $L^2(X,\mu)$ on en déduit que $T = \widetilde{M}_\mu(\varphi)$. □

6.29 Corollaire. *On a $M_\mu(A)' = M_\mu(A)'' = \widetilde{M}_\mu(L^\infty(X,\mu))$.*

Démonstration. Il résulte de la proposition 6.28 que $M_\mu(A)'' = \widetilde{M}_\mu(L^\infty(X,\mu))$.
Comme $M_\mu(A)$ est commutative, on a $M_\mu(A) \subset M_\mu(A)'$, donc $M_\mu(A)'' \subset M_\mu(A)'$; comme $M_\mu(A)'$ est commutative, on a $M_\mu(A)' \subset M_\mu(A)''$. □

Rappel sur la dérivée de Radon-Nikodym. Soient μ_1 et μ_2 deux mesures positives finies sur X. Posons $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Toute fonction f sur X mesurable pour μ est mesurable μ_1 et l'on a $\displaystyle\int |f|^2\,d\mu_1 \leqslant \int |f|^2\,d\mu$. Donc il existe une application linéaire continue $T :\in \mathcal{L}(L^2(X,\mu)) \to \mathcal{L}(L^2(X,\mu_1))$ qui à la classe dans $\mathcal{L}(L^2(X,\mu))$ d'une fonction sur X mesurable pour μ de carré intégrable pour μ, associe sa classe dans $L^2(X,\nu)$. Il est clair que $T \in Hom(M_\mu, M_{\mu_1})$ et $\|T\| \leqslant 1$. Posons $\rho = T^*1_{\mu_1} = T^*T1_\mu$.

Par la proposition précédente, on a $\rho \in L^\infty(X,\mu)$ et $T^*T = \widetilde{M}_\mu(\rho)$. En particulier, ρ est (presque partout) positive et, pour $f,g \in L^2(X,\mu)$, on a

$$\int \overline{f}\,g\,d\mu_1 = \langle Tf|Tg\rangle_{\mu_1} = \langle f|T^*Tg\rangle_\mu = \int \overline{f}\,g\,\rho\,d\mu.$$

Si $h \in L^1(X,\mu)$, on peut écrire $h = \overline{f}\,g$ avec $f,g \in L^2(X,\mu)$ et l'on a donc $\displaystyle\int h\,d\mu_1 = \int h\rho\,d\mu$, soit $\mu_1 = \rho\mu$.

Notons alors ρ_1'' la fonction caractéristique de $\{x \in X;\ \rho(x) = 1\}$ et ρ_2'' la fonction caractéristique de $\{x \in X;\ \rho(x) = 0\}$. On note $\rho_1' = \rho - \rho_1$" et enfin $\rho_2' = 1 - \rho - \rho_2''$.

On pose alors $\mu_j' = \rho_j'\mu$ et $\mu_j'' = \rho_j''\mu'$. On a $\mu_j = \mu_j' + \mu_j''$. Les mesures μ_1' et μ_2' sont équivalentes : on a $\mu_2' = \delta\mu_1'$, où $\delta(x) = (1-\rho(x))/\rho(x)$ pour $x \neq 0$ est μ_1'-presque partout non nulle ; les mesures μ_1', μ_1'' et μ_2'' sont étrangères.

Pour les représentations, on a :

a) Si μ_1 et μ_2 sont équivalentes, écrivant $\mu_2 = \delta\mu_1$, les représentationsM_{μ_1} et M_{μ_2} sont équivalentes : l'application $\xi \mapsto \delta^{-1/2}\xi$ est un isomorphisme de $L^2(X,\mu_1)$ sur $L^2(X,\mu_2)$ qui les entrelace.

b) Si μ_1 et μ_2 sont étrangères, alors $M_{\mu_1+\mu_2} = M_{\mu_1} \oplus M_{\mu_2}$. Tout $T \in Hom(M_{\mu_1}, M_{\mu_2})$ définit un élément de la forme $(1-p)Sp$ de $End(M_{\mu_1+\mu_2})$ où p est le projecteur sur $L^2(X,\mu_1)$. Comme $End(M_{\mu_1+\mu_2})$ est commutatif et $p(1-p) = 0$, il vient $T = 0$.

c) Dans le cas général, et avec les notations ci-dessus, il vient :
   - On a $M_{\mu_i} \simeq M_{\mu_i'} \oplus M_{\mu_i''}$.
   - Les représentations $M_{\mu_1'}, M_{\mu_1''}$ et $M_{\mu_2''}$ sont deux à deux inéquivalentes
   - On a $Hom(M_{\mu_1}, M_{\mu_2}) \simeq Hom(M_{\mu_1'}, M_{\mu_2'}) \simeq L^\infty(X,\mu_1')$.

Plus précisément

6.30 Proposition. *Soient μ_1 et μ_2 deux mesures positives finies sur X . Notons $\delta = d\mu_2/d\mu_1$ la dérivée de Radon-Nikodym de μ_1' par rapport à μ_2, de sorte que $\mu_1' = \delta\mu_2$.*

a) Soit $\varphi \in L^\infty(X,\mu_1)$. Pour tout $\xi \in L^2(X,\mu)$, $\delta^{1/2}\varphi\xi \in L^2(X,\mu_2)$ et $\widetilde{M}(\varphi) \in Hom(M_{\mu_1}, M_{\mu_2})$ où $\widetilde{M}(\varphi) : L^2(X,\mu_1) \to L^2(X,\mu_2)$ désigne l'application $\xi \mapsto \rho^{1/2}\varphi\xi$. De plus $\|M_\varphi\|$ est le sup essentiel de φ pour la mesure μ_1' .

b) Pour tout $T \in Hom(M_{\mu_1}, M_{\mu_2})$ il existe un unique $\varphi \in L^\infty(X,\mu_1)$ tel que $|\varphi|\mu_1$ soit absolument continue par rapport à μ_2 et $T = M_\varphi$. □

6.31 Corollaire. *Soit π une représentation non dégénérée de A .*

a) Il existe une famille $(\mu_k)_{k\in N}$ de mesures sur X telle que la représentation π soit équivalente à $\displaystyle\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \pi_{\mu_k}$.

b) Il existe un espace localement compact Y , une mesure de Radon μ_Y sur Y et une application continue $p : Y \to X$ tels que la représentation π soit équivalente à la représentation $M_{\mu_Y,p}$ définie par $M_{\mu_Y,p}(f)\xi = (f\circ p)\xi$ pour tout $f \in C_0(X)$ et tout $\xi \in L^2(Y,\mu)$.

Démonstration. a) Résulte du corollaire 6.12 et de la proposition 6.27.

b) en résulte en posant $Y = X \times \mathbb{N}$, où l'on a muni I de la topologie discrète, et notant $p : Y \to X$ la projection et μ_Y la mesure dont la restriction à $X \times \{i\}$ soit μ_i . □

6.32 Proposition. *Soit π une représentation non dégénérée de A . Pour tout $\xi \in H_\pi$ notons μ_ξ la mesure $f \mapsto \langle\xi, \pi(f)\xi\rangle$ sur X . On suppose que l'espace hilbertien H_π est séparable. Il existe $\xi \in H_\pi$ tel que μ_η soit absolument continue par rapport à μ_ξ pour tout $\eta \in H_\pi$.*

Démonstration. Par le corollaire 6.31, on peut supposer que π est une somme $\displaystyle\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} M_{\mu_k}$. Quitte à multiplier les μ_k par des constantes convenables, on peut supposer que $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_k$ est une mesure finie μ sur X. Soit $\eta \in H_\pi$ et $f_i \in L^2(X,\mu_i)$ sa composante. Alors $\mu_y = \displaystyle\sum_{i\in I} |f_i|^2\mu_i$ et, comme chacune des μ_i est absolument continue par rapport à μ , μ_η est absolument continue par rapport à μ . Notons enfin $\xi \in H_\pi$ l'élément dont la composante dans $L^2(\mu_i)$ est la classe de 1. Alors $\mu_\xi = \mu$. □

6.33 Définition. Soit π une représentation non dégénérée de A dans un espace hilbertien séparable. On appelle *mesure spectrale* de π la classe de la mesure $f \mapsto \langle\xi, \pi(f)\xi\rangle$ associée à tout vecteur $\xi \in H_\pi$ tel que tel que μ_η soit absolument continue par rapport à μ_ξ pour tout $\eta \in H_\pi$.

On note $\mathcal{B}(X)$ la C^*-algèbre des fonctions complexes boréliennes bornées sur X.

6.34 Proposition. *Soit π une représentation non dégénérée de $C(X)$.*

a) Il existe une unique extension $\tilde\pi$ de π à $\mathcal{B}(X)$ telle que pour toute suite bornée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}(X)$ convergeant simplement vers $f \in \mathcal{B}(X)$, $\tilde\pi(f_n)$ converge fortement vers $\tilde\pi(f)$.

b) Pour $f \in \mathcal{B}(X)$, la norme $\|\tilde\pi(f)\|$ de $\tilde\pi(f)$ est le « sup essentiel » $\|f\|_{\infty,\mu}$ de f pour la mesure spectrale μ de π.

c) On a $\tilde\pi(\mathcal{B}(X)) = \pi(C(X))''$.

Démonstration. a) On peut supposer que π est la représentation $M_{\mu_Y,p}$ du corollaire 6.31. Pour $f \in \mathcal{B}(X)$ et $\xi \in L^2(Y,\mu)$ posons $\widetilde{M_{\mu_Y,p}}(f)\xi = (f\circ p)\xi$. On obtient ainsi une représentation de $\mathcal{B}(X)$ qui étend $M_{\mu_Y,p}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée d'éléments de $\mathcal{B}(X)$ convergent simplement vers 0; pour tout $\xi \in L^2(Y,\mu)$, $\|(f_n\circ p)\xi\|$ converge vers 0 par le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Soit π' une autre extension de π, pour tout $\xi \in L^2(Y,\mu)$, les applications $f \mapsto \langle\xi, \pi'(f)\xi\rangle$ et $f \mapsto \langle\xi, \tilde\pi(f)\xi\rangle$ sont, par hypothèse des mesures positives finies sur X qui coïncident sur $C(X)$ donc sur $\mathcal{B}(X)$ et $\pi' = \tilde\pi$.

b) Il est clair que $\|M_{\mu_Y,p}(f)\| = \|f \circ p\|_{\infty,\mu_Y} = \|f\|_{\infty,\mu}$.

c) Soit u un élément unitaire de $End(\pi)$; posons $\pi'(f) = u^*\tilde{\pi}(f)u$. Il résulte de l'unicité de $\tilde{\pi}$ que u commute à $\tilde{\pi}(f)$ pour tout f. Soit $h \in End(\pi)$ un élément hermitien. Alors pour tout $f \in \mathcal{B}(X)$, $\tilde{\pi}(f)$ commute à $u = (h-i)^{-1}(h+i)$, donc à $h = i(u+1)(u-1)^{-1}$. On en déduit que $\tilde{\pi}(\mathcal{B}(X))$ est inclus dans le commutant $\pi(C(X))''$ de $End(\pi)$. Cela prouve que $\tilde{\pi}(\mathcal{B}(X)) \subset \pi(C(X))''$.

`La réciproque, sera rédigée plus tard peut-être...` □

Appendice : Multiplicité d'une représentation Soit π une représentation non dégénérée de A dans un espace hilbertien séparable. Pour $\xi \in H_\pi$, notons E_ξ l'adhérence de $\pi(A)\xi$ et μ_ξ la mesure $f \mapsto \langle \xi, \pi(f)\xi \rangle$.

6.35 Lemme. *Soit μ une mesure de Radon sur X. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ notons M_μ^n la somme de n copies de la représentation M_μ. L'espace $Hom(M_\mu^k, M_\mu^\ell)$ est formée des opérateurs de multiplication par les éléments de $L^\infty(X,\mu; M_{\ell,k}(\mathbb{C})) = M_{\ell,k}(L^\infty(X,\mu))$.*

Démonstration. Une application linéaire continue $T \in \mathcal{L}(L^2(X,\mu)^k, L^2(X,\mu)^\ell)$ est donnée par une matrice $(a_{i,j}) \in M_{\ell,k}(\mathcal{L}(L^2(X,\mu)))$: pour $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k) \in L^2(X,\mu)$, on écrit $T\xi = (\eta_1, \dots, \eta_\ell)$ avec $\eta_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} a_{i,j}\xi_j$. Il est clair que $T \in Hom(M_\mu^k, M_\mu^\ell)$ si et seulement si $a_{i,j} \in End(M)$ pour tout i,j. □

Soit μ une mesure de Radon sur X et n une application μ-mesurable de X dans l'espace discret $\mathbb{N} - \{0\} \cup \{+\infty\}$. Notons ε la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ ($\varepsilon(\{k\}) = 1$ pour tout k) et $M_{\mu,\infty}$ la représentation de $C(X)$ dans $L^2(X,\mu;\ell^2(\mathbb{N})) = L^2(X \times \mathbb{N}; \mu \times m\}$ par opérateurs de multiplication. Posons $Y = \{\, (x,k) \in X \times \mathbb{N} ,\ k < n(x)\,\}$ et notons $\pi_{\mu,n}$ la restriction de π à $H_{\mu,n} = L^2(Y, \mu \times \varepsilon)$.

6.36 Théorème. *Soient π une représentation de $A = C(X)$ dans un espace hilbertien séparable et μ une mesure dans la classe spectrale de π. Il existe une application μ-mesurable $n : X \to \mathbb{N} - \{0\} \cup \{+\infty\}$, unique modulo μ telle que π soit équivalente à la représentation $\pi_{\mu,n}$.*

Démonstration. Montrons l'existence de n. Écrivons $\pi \simeq \displaystyle\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} M_{\mu_k}$. Les μ_k sont toutes absolument continues par rapport à la mesure spectrale μ. Écrivons $\mu_k = \rho_k\mu$ où ρ_k est une fonction borélienne intégrable. Posons $Y_k = \{x \in X;\ \rho_k(x) \neq 0\}$ et notons $\chi_k : X \to \{0,1\}$ la fonction caractéristique de Y_k.

Posons alors $n = \sum \chi_K : X \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Comme μ est la mesure spectrale, l'ensemble $\{x \in X;\ n(x) = 0\}$ est μ-négligeable.

Posons $Z = \{(x,k) \in X \times \mathbb{N};\ x \in Y_k\}$ et $Y = \{\, (x,k) \in X \times \mathbb{N} ,\ k < n(x)\,\}$. L'application $(x,k) \mapsto (x, \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \chi_j(x)$ est une bijection d'espaces boréliens de Z sur Y et induit un isomorphisme $U \in \mathcal{L}(L^2(Z, \mu\times\varepsilon), L^2(Y, \mu \times \varepsilon))$ qui entrelace π et $M_{\mu,n}$.

Établissons l'unicité de n. Soient n et m deux applications μ-mesurables de X dans $\mathbb{N} - \{0\} \cup \{+\infty\}$. Supposons que les représentations $M_{\mu,n}$ et $M_{\mu,m}$ sont équivalentes et soit $u \in Hom(M_{\mu,n}, M_{\mu,m})$ un opérateur unitaire. Alors u entrelace les extensions $\widetilde{M}_{\mu,n}$ et $\widetilde{M}_{\mu,m}$ de $M_{\mu,n}$ et $M_{\mu,m}$ à $\mathcal{B}(X)$ (prop. 6.34). Fixons $k, \ell \in \mathbb{N} - \{0\} \cup \{+\infty\}$ tels que $k > \ell$, posons $B = \{\, t \in X ,\ n(x) = k ,\ m(x) = \ell\}$, notons χ sa fonction caractéristique et posons $\nu = \chi\mu$. Notons k et ℓ les fonctions sur X constantes égales à k et ℓ

respectivement. La restriction de $M_{\mu,n}$ à $M_{\mu,n}(\chi)H_{\pi_{\mu,n}}$ s'identifie à $M_{\nu,k}$; celle de $M_{\mu,m}$ à $M_{\mu,m}(\chi)H_{\pi_{\mu,n}}$ s'identifie à $\pi_{\nu,\ell}$. La restriction de u définit un opérateur unitaire $v \in Hom(M_{\nu,k}, M_{\nu,\ell})$. Par le lemme 6.35, il existe une application $x \mapsto v_x$ de X dans $M_{\ell,k}(\mathbb{C})$ telle que, pour tout $\xi \in L^2(X,n)^n$ et presque tout $t \in X$ on ait $(v\xi)(x) = v_x\xi(x)$. Comme $v^*v = 1$, on a $v_x^*v_x = 1$; or $w^*w \neq 1$ pour tout $w \in M_{\ell,k}(\mathbb{C})$. Il en résulte que $\nu = 0$. Ainsi $m = n$ modulo μ. □

La fonction n du théorème 6.36 s'appelle *multiplicité* de la représentation π.

Il résulte de ce théorème que deux représentations de $C_0(X)$ possédant un ensemble totalisateur dénombrable sont équivalentes si et seulement si elles ont même mesure spectrale et même multiplicité.

6.6 Calcul fonctionnel pour les opérateurs normaux

Soit T un opérateur normal agissant dans l'espace hilbertien H et notons S son spectre. L'application $f \mapsto f(T)$ est une représentation de la C^*-algèbre $C(\operatorname{Sp} T)$ dans H. Les résultats ci-dessus se traduisent donc par :

6.37 Proposition. *Il existe un espace localement compact Y, une application continue $f : Y \to \mathbb{C}$, une mesure μ sur Y et un opérateur unitaire $U \in \mathcal{L}(H, L^2(Y,\mu))$ tels que $f(Y) = S$ et, pour tout $\xi \in L^2(Y,\mu)$ on a $UTU^*\xi = f\xi$.*

Démonstration. Résulte immédiatement du corolaire 6.31.b). □

6.38 Théorème. *Soit T un opérateur normal agissant dans l'espace hilbertien H. Il existe une unique représentation unifère π_T de $\mathcal{B}(\operatorname{Sp} T)$ dans H satisfaisant*

a) $\pi_T(z) = T$ où z est la fonction $\lambda \mapsto \lambda$ sur $\operatorname{Sp} T$.

b) Pour toute suite bornée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}(\operatorname{Sp} T)$ convergeant simplement vers $f \in \mathcal{B}(\operatorname{Sp} T)$, $\pi_T(f_n)$ converge fortement vers $\pi_T(f)$.

Démonstration. Le théorème résulte donc de la prop. 6.34. □

6.39 Définition. Si T est un opérateur normal agissant dans l'espace hilbertien H et si $f \in \mathcal{B}(\operatorname{Sp} T)$ l'élément $\pi_T(f)$ du théorème 6.38 se note $f(T)$.

Si f est une fonction sur $\mathbb{C}$ dont la restriction f' à $\operatorname{Sp} T$ est borélienne et bornée, on note $f(T)$ l'opérateur $f'(T)$.

6.40 Corollaire. *Soit T un opérateur normal agissant dans l'espace hilbertien H.*

a) Si $f \in C(\operatorname{Sp} T)$ les définitions de $f(T)$ données ci-dessus et dans dans la déf. 6.12 coïncident.

b) Pour tout $f \in \mathcal{B}(\operatorname{Sp} T)$, $f(T)$ est un opérateur normal et commute avec tout opérateur du commutant de $\{T, T^*\}$.

c) Pour tout $f, g \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ on a $g \circ f(T) = g(f(T))$.

Démonstration. a) résulte de l'unicité du corollaire 3.11. Comme $f(T)$, $f \in \mathcal{B}(\operatorname{Sp} T)$ est une C^*-algèbre commutative, $f(T)$ est normal pour tout $f \in \mathcal{B}(\operatorname{Sp} T)$. La deuxième assertion de b) résulte de la prop. 6.34.c). Enfin c) résulte de l'unicité dans le théorème 6.38. □

Notons ε la mesure sur $\mathbb{N}$ telle que $\varepsilon(\{k\}) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

6.41 Théorème. *Soit T un opérateur normal de l'espace hilbertien H séparable. Alors il existe une mesure μ sur $\operatorname{Sp} T$, unique à équivalence de mesures près, une application μ-mesurable $n : \operatorname{Sp} T \to \mathbb{N} - \{0\} \cup \{+\infty\}$, unique modulo μ et un isomorphisme $U : H \to L^2(S_n, \mu \times \varepsilon)$ où $S_n = \{ (z,k) \in \operatorname{Sp} T \times \mathbb{N}, \ k < n(t) \}$ tels que $T = U^* T_0 U$ où T_0 est l'opérateur de $L^2(S_n, \mu \times \varepsilon)$ donné par $(T_0 f)(z,k) = z f(z,k)$ pour tout $f \in L^2(S_n, \mu \times \varepsilon)$ et tout $(z,k) \in S_n$.*

Démonstration. Résulte aussitôt du théorème 6.36. □

La classe de la mesure μ et la fonction n données par le théorème 6.41 s'appellent respectivement *mesure spectrale* et *fonction multiplicité* de T.

6.42 Corollaire. *Pour que deux opérateurs normaux T et S de l'espace hilbertien H de type dénombrable soient unitairement équivalents, il faut et il suffit qu'ils aient même spectre, même mesure spectrale et que leurs fonctions multiplicité soient égales presque partout.* □

6.43 Remarque. Soient T un opérateur normal agissant sur l'espace hilbertien H et $\lambda \in \mathbb{C}$. Notons χ_λ la fonction caractéristique de $\{\lambda\}$ et E_λ l'espace propre $E_\lambda = \ker(T - \lambda)$. Pour $x \in E_\lambda$ on a $f(T)x = f(\lambda)x$ pour toute fonction continue f donc pour tout $f \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$; comme $(z - \lambda)\chi_\lambda = 0$ où z est la fonction $t \mapsto t$ sur $\operatorname{Sp} T$, $(T - \lambda)\chi_\lambda(T) = 0$. Donc $\mathcal{P}_{\{\lambda\}} = \chi_\lambda(T)$ est le projecteur sur E_λ.

7 Sous-algèbres involutives de $\mathcal{L}(H)$. Algèbres de von Neumann

7.1 Le théorème du bicommutant de von Neumann

Soit H un espace hilbertien. Pour toute partie B de $\mathcal{L}(H)$ le *commutant* de B dans H est $B' = \{ T \in \mathcal{L}(H), \ \forall S \in A, \ ST = TS \}$; le *bicommutant* de B dans H est $B'' = (B')'$.

Une sous-algèbre involutive A de $\mathcal{L}(H)$ est dite *non dégénérée* si l'inclusion de A dans $\mathcal{L}(H)$ est une représentation non dégénérée de A.

7.1 Lemme. *Soient H un espace hilbertien, A une sous-algèbre involutive non dégénérée de $\mathcal{L}(H)$ et $T \in A''$.*

a) Alors T est fortement adhérent à A.

b) Si $T = T^*$, alors T est fortement adhérent à $\{ S \in A, \ S = S^* \}$.

c) Si $\|T\| \leqslant 1$, alors T est fortement adhérent à $\{ S \in A, \ \|S\| \leqslant 1 \}$.

d) Si $T = T^*$ et $\|T\| \leqslant 1$, alors T est fortement adhérent à $\{ S \in A, \ S = S^*, \ \|S\| \leqslant 1 \}$.

Démonstration. Quitte à remplacer A par son adhérence normique on peut supposer que A est une sous-C^*-algèbre de $\mathcal{L}(H)$.

a) Soit F une partie finie de H. Notons π la représentation de $\mathcal{L}(H)$ dans l'espace hilbertien H^F telle que pour tout $S \in \mathcal{L}(H)$, $\xi \in H^F$, $x \in F$ on ait $(\pi(S)\xi)(x) = S\xi(x)$. Notons $u \in H^F$ l'élément tel que $u(x) = x$, pour tout $x \in F$.
Soit P le projecteur orthogonal sur l'adhérence K de $\pi(A)u$. Comme $\pi(A)u$ est invariant par $\pi(A)$, K est invariant par $\pi(A)$ donc $P \in \pi(A)'$ (prop. 6.6.a)). Remarquons que P est représenté par une matrice $(P_{x,y})_{x,y \in F}$ d'éléments de $\mathcal{L}(H)$. Comme $P \in \pi(A)'$, il s'ensuit que pour tout $x, y \in F$, $P_{x,y} \in A'$. On en déduit que P commute à $\pi(T)$. Soit a_i une unité approchée bornée

de A. Par hypothèse, pour tout $x \in H$, $\lim a_i x = x$. Il s'ensuit que $\pi(a_i)u$ converge vers u donc $u \in K$. Enfin $\pi(T)u \in K$. Ceci ayant lieu pour toute partie finie F de K, T est fortement adhérent à A.

b) Supposons que $T = T^*$. Par a) il existe une famille $(S_i)_{i\in I}$ d'éléments de A indexée par un ensemble filtré I convergeant fortement vers T. Alors S_i, S_i^* et $(S_i+S_i^*)/2$ convergent faiblement vers T. Donc T est faiblement adhérent à $\{ S \in A,\ S = S^* \}$. Il s'ensuit que $\pi(T)u$ est faiblement adhérent au sous ensemble convexe $\{ \pi(S)u,\ S \in A,\ S = S^* \}$ de H^F. Par le théorème d'Hahn-Banach $\pi(T)u$ est fortement adhérent à $\{ \pi(S)u,\ S \in A,\ S = S^* \}$, d'où b).

d) Notons f la fonction $t \mapsto 2t(1+t^2)^{-1}$ définie sur R. Par restriction f définit un homéomorphisme de $[-1, 1]$ sur lui-même. Soit g l'homéomorphisme réciproque. Soient a et b deux éléments hermitiens de $\mathcal{L}(H)$. On a

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= 2(1 + a^2)^{-1}(a(1 + b^2) - (1 + a^2)b)(1 + b^2)^{-1} \\ &= 2(1 + a^2)^{-1}(a - b)(1 + b^2)^{-1} + 1/2 f(a)(b - a)f(b) \end{aligned}$$

En particulier, pour tout $x \in H$, $\|f(a)x - f(b)x)\| \leqslant 2\|(a-b)(1+b^2)^{-1}x\| + 1/2\|(b-a)f(b)x\|$. On en déduit que l'application $a \mapsto f(a)$ est continue de l'espace des opérateurs hermitiens de H muni de la topologie forte dans lui même. Comme $g(T)$ est fortement adhérent à $\{ S \in A,\ S = S^* \}$, $T = f(g(T))$ est fortement adhérent à $\{ f(S),\ S \in A,\ S = S^* \} = \{ S \in A,\ S = S^*,\ \|S\| \leqslant 1 \}$.

c) Considérons $M_2(A)$ plongé dans $M_2(\mathcal{L}(H)) = \mathcal{L}(H \oplus H)$. Alors $T' = \begin{pmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{pmatrix}$ est dans le bicommutant de $M_2(A)$ donc d'après d) dans l'adhérence de $\{ S \in M_2(A),\ S = S^*,\ \|S\| \leqslant 1 \}$. Comme l'application $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto b$ est continue de $M_2(\mathcal{L}(H))$ muni de la topologie forte dans $\mathcal{L}(H)$ muni de la topologie forte, c) en résulte. □

7.2 Théorème. *Soient H un espace hilbertien et A une sous-algèbre involutive non dégénérée de $\mathcal{L}(H)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $A = A''$.

(ii) A est faiblement fermée dans $\mathcal{L}(H)$.

(iii) A est fortement fermée dans $\mathcal{L}(H)$.

(iv) La boule unité de A est faiblement fermée dans $\mathcal{L}(H)$.

(v) La boule unité de A est fortement fermée dans $\mathcal{L}(H)$.

Démonstration. Pour toute partie B de $\mathcal{L}(H)$, $B' = \{ T \in \mathcal{L}(H),\ \forall x, y \in H,\ \forall b \in B,\ \langle b^* x, Ty\rangle = \langle x, Tby\rangle \}$ est faiblement fermé. Donc (i) $\iff$ (ii).

Les assertions (ii) $\Rightarrow$ (iii) et (iv) $\Rightarrow$ (v) sont claires, de même que (ii) $\Rightarrow$ (iv) et (iii) $\Rightarrow$ (v) vu que la boule unité de $\mathcal{L}(H)$ est faiblement fermée.

Enfin (v) $\Rightarrow$ (i) découle du lemme 7.1. □

7.3 Corollaire. *Les adhérences forte et faible et le bicommutant de toute sous-algèbre involutive non dégénérée de $\mathcal{L}(H)$ coïncident.* □

7.4 Définition. Une sous-algèbre involutive non dégénérée de $\mathcal{L}(H)$ satisfaisant les conditions du théorème 1 est appelée *algèbre de von Neumann.*

Le centre d'une algèbre de von Neumann est une algèbre de von Neumann - donc un $L^\infty(X, \mu)$.

7.5 Définition. On appelle *facteur* une algèbre de von Neumann dont le centre est réduit aux scalaires.

7.6 Remarque. Rappelons que $\mathcal{L}(H)$ est le dual de $\mathcal{L}^1(H)$. Soit $R \subset \mathcal{L}^1(H)$, l'espace des endomorphismes de H de rang fini. La topologie faible de $\mathcal{L}(H)$ est $\sigma(\mathcal{L}(H), R)$. Comme R est dense dans $\mathcal{L}^1(H)$, la topologie faible coïncide sur la boule unité de $\mathcal{L}(H)$ avec $\sigma(\mathcal{L}(H), \mathcal{L}^1(H))$. Il s'ensuit qu'une condition équivalente dans le théorème 1 est : (vi) A est $\sigma(\mathcal{L}(H), \mathcal{L}^1(H))$ fermée.

Soit B une algèbre de von Neumann agissant dans H. Comme B est $\sigma(\mathcal{L}(H), \mathcal{L}^1(H))$ fermée dans $\mathcal{L}(H)$, c'est le dual de $\mathcal{L}^1(H)/\{ f \in \mathcal{L}^1(H),\ f(B) = \{0\} \}$.

7.2 Représentations irréductibles

On dit que la représentation π est *irréductible* si elle est non nulle et les seuls sous-espaces fermés de H_π stables par π sont H_π et $\{0\}$.

7.7 Théorème. *Soit π une représentation non nulle d'une algèbre involutive A dans un espace hilbertien H. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) La représentation π est irréductible.

(ii) Tout vecteur non nul de H est totalisateur pour π.

(iii) Le commutant de $\pi(A)$ est réduit à $\mathbb{C}$.

(iv) $\pi(A)$ est fortement dense dans $\mathcal{L}(H)$.

Démonstration. Si π est irréductible, $\pi(A)H_\pi$ est un sous-espace non nul de H_π stable par π donc dense dans H_π, donc π est non dégénérée. Soit x un vecteur non nul. Alors $\pi(A)x$ n'est pas nul (prop. 5.3), donc il est dense dans H_π, donc x est totalisateur pour π.

La réciproque étant claire, (i) $\iff$ (ii).

Supposons que $\mathrm{End}(\pi)$ n'est pas réduit aux opérateurs scalaires. Si $a \in \mathrm{End}(\pi)$ n'est pas scalaire alors $h = 1/2(a + a^*)$ et $k = i/2(a^* - a)$ ne sont pas tous deux scalaires (vu que $a = h + ik$). Si $a \in \mathrm{End}(\pi)$ est un élément hermitien non scalaire, son spectre n'est pas réduit à un point et il existe des fonctions réelles continues non nulles f et g sur $\mathrm{Sp}(a)$ telles que $fg = 0$. Alors $\ker f(a)$ est un sous-espace fermé de H_π invariant par π distinct de H_π (puisque $f(a) \neq 0$) et de $\{0\}$ (puisque $g(a)f(a) = 0$ et $g(a) \neq 0$). Donc π n'est pas irréductible, donc (i) $\Rightarrow$ (iii).

Le projecteur sur l'adhérence de $\pi(A)H$ appartient au commutant de $\pi(A)$. Si (iii) est vérifiée, comme π n'est pas nulle, la représentation π est non dégénérée. Donc le bicommutant de $\pi(A)$ coïncide avec sa fermeture forte (corollaire 7.3) d'où (iii) $\Rightarrow$ (iv). Enfin, (iv) $\Rightarrow$ (ii) est clair. □

7.8 Proposition. *Toute représentation irréductible d'une C^*-algèbre est algébriquement irréductible.*

Démonstration. Soit π une représentation irréductible de A dans un espace hilbertien H et soit $x \in H$ un vecteur de norme 1. Pour tout $y \in H$, on a $\theta_{y,x}(x) = y$ et $\|\theta_{y,x}\| = \|y\|$. Par le lemme 7.1.c), il existe $a_0 \in A$ tel que $\|y - \pi(a_0)x\| \leqslant 1/2$ et $\|a_0\| \leqslant \|y\|$. Posons $z_1 = y - \pi(a_0)x$. Par récurrence, on construit une suite a_n d'éléments de A et une suite z_n d'éléments de H tels que pour tout $n \geqslant 1$ on ait $\|a_n\| \leqslant 2^{-n}$, $\|z_n\| \leqslant 2^{-n}$ et $z_{n+1} = z_n - \pi(a_n)x$. On pose alors $a = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$; on a $\pi(a)x = y$. □

8 Exemples d'algèbres d'opérateurs

8.1 Algèbres de groupes dénombrables

Soit Γ un groupe dénombrable. L'espace de Banach $\ell^1(\Gamma)$ (muni de la norme $\| \ \|_1$) est une algèbre de Banach involutive :

- pour $g \in \Gamma$, notons $u_g \in \ell^1(\Gamma)$ la fonction caractéristique de g (*i.e.* $u_g(h) = \delta_g^h$ - où δ_g^h est le symbole de Kronecker : $\delta_g^h = 1$ si $g = h$ et 0 sinon) ;
- un élément $f \in \ell^1(\Gamma)$ s'écrit donc $\sum_{g\in\Gamma} f(g)u_g$ (somme normalement convergente) ;
- on linéarise alors le produit défini par $u_g u_h = u_{gh}$; on obtient le produit de convolution avec les formules $f_1 \cdot f_2 = \sum_{g_1,g_2} f_1(g_1)f_2(g_2)u_{g_1g_2} = \sum_{g\in\Gamma} f_1 * f_2(g)u_g$ où $f_1 * f_2(g) = \sum_{h\in\Gamma} f_1(h)f_2(h^{-1}g)$;
- on veut que u_g soit unitaire ; or pose donc $u_g^* = u_{g^{-1}}$, puis $f^*(g) = \overline{f(g^{-1})}$.

8.1 Définition. On appelle C^*-algèbre pleine du groupe Γ et on note $C^*(\Gamma)$ la C^*-algèbre enveloppante de l'algèbre de Banach involutive $\ell^1(\Gamma)$ (*cf.* section 3.7).

On obtient une identification entre représentations unitaires de Γ, *i.e.* morphismes de Γ dans le groupe unitaire d'un espace hilbertien, représentations involutives (non dégénérées) de $\ell^1(\Gamma)$ et représentations involutives (non dégénérées) de $C^*(\Gamma)$.

Soit $\ell^2(\Gamma)$ l'espace hilbertien avec une base hilbertienne $(e_g)_{g\in\Gamma}$ indexée par Γ.

Pour $g \in \Gamma$, il existe un opérateur unitaire λ_g (*resp.* ρ_g) agissant sur $\ell^2(\Gamma)$ tel que l'on ait $\lambda_g e_h = e_{gh}$ (*resp.* $\rho_g e_h = e_{hg^{-1}}$) - pour tout $h \in \Gamma$.

Pour $g, h \in \Gamma$, on a $\lambda_{gh} = \lambda_g\lambda_h$ et $\lambda_g^* = \lambda_g^{-1} = \lambda_{g^{-1}}$ (*resp.* $\rho_{gh} = \rho_g\rho_h$ et $\rho_g^* = \rho_g^{-1} = \rho_{g^{-1}}$).

En d'autres termes, λ et ρ sont des représentations unitaires de Γ et définissent donc des représentations de $C^*(\Gamma)$.

8.2 Définition. a) La C^*-algèbre réduite de Γ est l'adhérence du sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\ell^2(\Gamma))$ engendré par les λ_g pour $g \in \Gamma$. C'est aussi l'image de $C^*(\Gamma)$ par la représentation λ.

b) L'algèbre de von Neumann du groupe Γ est $L\Gamma = \{\lambda_g;\ g \in \Gamma\}''$.

8.3 Groupes commutatifs. Si Γ est commutatif, toutes ces algèbres sont abéliennes ; si $C_r^*(\Gamma)$ est commutative, alors Γ est commutatif ; donc une algèbre d'opérateurs de Γ est commutative si et seulement si Γ est commutatif.

Dans ce cas, un caractère sur $C_r^*(\Gamma)$ est déterminé par ses valeurs en les éléments λ_g. Il détermine donc un morphisme de groupe $\Gamma \to \mathbb{U}(1) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$.

On identifie alors :

- $\operatorname{Sp} C^*(\Gamma)$ avec le groupe dual $\widehat{\Gamma}$ de Γ (*i.e.* le groupe compact des homomorphismes $\Gamma \to \mathbb{U}(1)$) ; donc $C^*(\Gamma) \simeq C(\widehat{\Gamma})$.
- A travers l'isomorphisme de $\ell^2(\Gamma) \simeq L^2(\Gamma, dh)$ (où dh est la mesure de Haar de $\widehat{\Gamma}$), on identifie $C_r^*(\Gamma)$ avec l'action de $C(\widehat{\Gamma})$ par opérateurs de multiplication et $L\Gamma$ avec $L^\infty(\Gamma, dh)$.

Revenons au cas général. Déterminons le commutant $\{\lambda_g;\ g \in \Gamma\}'$ et le bicommutant $\{\lambda_g;\ g \in \Gamma\}''$.

8.4 Convolution. a) Pour $\xi, \eta \in \ell^2(\gamma)$ et $g \in \Gamma$, posons $\xi * \eta(g) = \sum_{h\in\Gamma} \xi(g)\eta(g^{-1}h)$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, cette somme est bien définie et l'on a $|\xi * \eta(g)| \leqslant \|\xi\|_2\|\eta\|_2$

b) On a ainsi une application bilinéaire continue $(\xi, \eta) \mapsto \xi * \eta$ de $\ell^2(\Gamma) \times \ell^2(\Gamma)$ dans $\ell^\infty(\Gamma)$. Bien sûr $e_g * e_h = e_{gh}$. Pour $\xi, \eta \in \mathbb{C}\Gamma$ (combinaison linéaire finie de e_g), on a $\xi * \eta \in \mathbb{C}\Gamma$. Par densité de $\mathbb{C}\Gamma$ dans $\ell^2(\Gamma)$, on en déduit que $\xi * \eta$ est dans l'adhérence $c_0(\Gamma)$ de $\mathbb{C}\Gamma$ pour le norme $\| \|_\infty$.

c) Posons $\mathcal{A} = \{\xi \in \ell^2(\Gamma);\ \forall \eta \in \ell^2(\Gamma),\ \xi * \eta \in \ell^2(\Gamma)\}$. Remarquons que pour $\xi \in \mathcal{A}$, le graphe de l'application $\lambda(\xi) : \eta \mapsto \xi * \eta$ de $\ell^2(\Gamma)$ dans $\ell^2(\Gamma)$ est $\{(\alpha, \beta) \in \ell^2(\Gamma)^2;\ \xi * \alpha = j(\beta)\}$ où j est l'inclusion de $\ell^2(\Gamma)$ dans $c_0(\Gamma)$. Comme cette inclusion est continue, ce graphe est fermé, donc $\lambda(\xi)$ est continue.

d) On vérifie sans peine que, pour $\xi \in \mathcal{A}$, on a $\lambda(\xi)^* = \lambda(J\xi)$, où $J : \ell^2(\Gamma) \to \ell^2(\Gamma)$ est l'application définie par $(J\xi)(g) = \overline{\xi(g^{-1})}$. En particulier, $J\xi \in \mathcal{A}$.

e) Remarquons que, pour $\xi, \eta \in \ell^2$, on a $(J\xi) * (J\eta) = J(\eta * \xi)$. On en déduit que l'on a $\xi \in A$, si et seulement si pour tout $\eta \in \ell^2(\Gamma)$, on a $\eta * \xi \in \ell^2(\Gamma)$. L'application $\rho(\tilde{\xi}) : \eta \mapsto \eta * \xi$ est alors continue et l'on a $\|\rho(\tilde{\xi})\| = \|\lambda(\xi)\|$.

8.5 Proposition. *a) Soit $T \in \{\lambda_g;\ g \in \Gamma\}'$ et posons $\xi = Te_1$. On a $\xi \in \mathcal{A}$ et $T = \rho(\widetilde{\xi})$.*

b) Pour $\xi \in \mathcal{A}$, on a $\rho(\widetilde{\xi}) \in \{\lambda_g;\ g \in \Gamma\}'$.

c) De même, $\{\rho_g;\ g \in \Gamma\}' = \{\lambda(\xi);\ \xi \in \mathcal{A}\}$.

On en déduit que, pour $\xi, \eta \in \mathcal{A}$, l'opérateur $\lambda(\xi)\lambda(\eta)$ est dans $\lambda(A)$. On vérifie que $\lambda(\xi)\lambda(\eta) = \lambda(\xi * \eta)$. En particulier, le produit $*$ est associatif sur $\mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ contient $\mathbb{C}\Gamma$, elle est dense dans $\ell^2(\Gamma)$. On en déduit que $\lambda(\xi)$ et $\rho(\eta)$ commutent.

On a démontré :

8.6 Proposition. *$\{\rho_g;\ g \in \Gamma\}' = \{\lambda_g;\ g \in \Gamma\}''$ et $\{\lambda_g;\ g \in \Gamma\}' = \{\rho_g;\ g \in \Gamma\}''$.*

Démonstration. Si A et B commutent, alors $A \subset A'' \subset B'$.

Comme $\{\lambda_g;\ g \in \Gamma\}$ et $\{\rho_g;\ g \in \Gamma\}$ commutent, on a $\{\lambda_g;\ g \in \Gamma\}'' \subset \{\rho_g;\ g \in \Gamma\}'$.

Comme $\{\rho_g;\ g \in \Gamma\}'$ et $\{\lambda_g;\ g \in \Gamma\}'$ commutent, $\{\rho_g;\ g \in \Gamma\}' \subset \{\lambda_g;\ g \in \Gamma\}''$. $\square$

8.7 Le centre de $L\Gamma$. Soit $\xi \in \mathcal{A}$. Alors $\lambda(\xi)$ est dans le centre de $L(\Gamma)$ si et seulement si $\lambda_g\lambda(\xi) = \lambda(\xi)\lambda_g$ pour tout $g \in \Gamma$. Or $\lambda_g\lambda(\xi)\lambda_g^{-1} = \lambda(\xi')$ où $\xi'(h) = \xi(g^{-1}hg)$. Donc $\lambda(\xi)$ est dans le centre de $L(\Gamma)$ si et seulement si ξ est constant sur les classes de conjugaison de Γ. On en déduit :

8.8 Proposition. *L'algèbre $L\Gamma$ est un facteur si et seulement si les classes de conjugaison de Γ distinctes de $\{1\}$ sont infinies. On dit que Γ est ICC.*

Citons quelques exemples de groupes ICC :

a) Le groupe $PGL_n(\mathbb{Z})$ est ICC. En effet, soit $a \in GL_n(\mathbb{Z})$ dont le classe de conjugaison dans $GL_n(\mathbb{Z})$ est finie. Notons Z_a son centralisateur, qui est d'indice fini dans $GL_n(\mathbb{Z})$. Soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$ avec $i \neq j$, et, pour $s \in \mathbb{C}$, notons $t_{i,j}(s) = I_n + sE_{i,j}$ la transvection correspondante. Comme Z_a est d'indice fini, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $t_{i,j}(k) \in Z_a$. On en déduit que $aE_{i,j} = E_{i,j}a$. Enfin, a est dans le centre de $M_n(\mathbb{C})$ puisque l'algèbre engendrée par les $E_{i,j}$ est $M_n(\mathbb{C})$.

b) Le groupe des matrices 2×2 de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec a de la forme 2^k avec $k \in \mathbb{Z}$ et b de la forme $p2^{-q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$. En effet, le centralisateur de tout élément distinct de I_2 est commutatif, donc d'indice infini.

c) Groupe libre : Les sous groupes $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$ et $K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2k & 1 \end{pmatrix},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$ sont libres dans $SL_2(\mathbb{R})$.

Pour cela, on utilise le :

8.9 Lemme du ping-pong. *Soit G un groupe, et soient H et K deux sous-groupes de G, tels que H a au moins 3 éléments. On suppose que G agit sur un ensemble X ayant deux parties non vides disjointes Y et Z telles que :*

- *Pour tout $h \in H \setminus \{1\}$, on a $hY \subset Z$.*
- *Pour tout $k \in K \setminus \{1\}$, on a $kZ \subset Y$.*

Alors H et K sont libres dans G.

Démonstration. On veut montrer que tout mot réduit est différent de l'identité.

Soit donc m un tel mot réduit. Il y a 4 cas possibles (avec $h_i \in H \setminus \{1\}$ et $k_i \in K \setminus \{1\}$) :

1. $m = h_1 k_1 h_2 k_2 ... k_{n-1} h_n$ avec $n \geqslant 1$: on a $mY \subset Z$, donc $m \neq 1$.
2. $m = k_1 h_2 k_2 ... h_n k_n$ avec $n \geqslant 2$. Alors $mZ \subset Y$, donc $m \neq 1$.
3. $m = h_1 k_1 h_2 k_2 ... h_n k_n$. Soit alors $h \in H$, avec $h \neq 1$, et $h \neq h_1^{-1}$ (rappelons que H a au moins 3 éléments). Alors, par le premier cas, $hmh^{-1} \neq 1$.
4. $m = k_1 h_2 k_2 ... h_n$. Par le cas 3, $m^{-1} \neq 1$, donc $m \neq 1$. □

Pour appliquer le lemme du ping-pong, on fait agir $SL_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^2$ et l'on pose $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| < |y|\}$ et $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| > |y|\}$.

d) Permutations infinies. Notons $\mathfrak{S}_\infty$ le groupe des permutations d'un ensemble infini dénombrable ayant un support fini. Ce groupe est ICC. En effet, la classe de conjugaison de tout élément est l'ensemble (infini !) des permutations ayant la même décomposition en cycles.

8.2 Quelques mots sur les produits croisés

8.2.1 Produit croisé d'une C^*-algèbre par un groupe discret d'automorphismes

Soit A une C^*-algèbre unifère. On note $\mathrm{Aut}(A)$ le groupe d'automorphismes involutifs de A. Soient Γ un groupe dénombrable et $\alpha : \Gamma \to \mathrm{Aut}(A)$ un homomorphisme de groupes. On munit l'espace de Banach $\ell^1(\Gamma; A)$ des applications $a : \Gamma \to A$ telles que $\sum_{g \in \Gamma} \|a_g\| < +\infty$ du produit défini par

$$(a * b)_g = \sum_{h \in \Gamma} a_h \alpha_h(b_{h^{-1}g})$$

et de l'involution définie par

$$(a^*)_g = \alpha_{g^{-1}}(a^*_{g^{-1}})$$

On vérifie que, munie de ces opérations, $\ell^1(\Gamma; A)$ est bien une algèbre de Banach involutive.

On appelle produit croisé plein associé et on note $A \rtimes_\alpha \Gamma$ la C^*-algèbre enveloppante de $\ell^1(\Gamma; A)$.

Les représentations non dégénérées de $A \rtimes_\alpha \Gamma$ dans un espace de Hilbert H sont données par les *représentations covariantes* (π, u) de A et Γ :

- $\pi : A \to \mathcal{L}(H)$ est une représentation involutive de A ;
- $u : \Gamma \to U(H)$ est une représentation unitaire de Γ ;
- pour $a \in A$ et $g \in \Gamma$, on a $\pi(\alpha_g(a)) = u_g \pi(a) u_g^{-1}$ (propriété de covariance).

Soit $\varphi : A \to \mathcal{L}(H)$ une représentation. On définit une représentation covariante (π, u) dans $\ell^2(\Gamma, H)$ en posant $(u_g(\xi))(h) = \xi(h^{-1}g)$ et $(\pi(a)\xi)(h) = \varphi(\alpha_{h^{-1}}(a))(\xi(h))$.

On démontre que si φ_1 et φ_2 sont deux représentations fidèles de A, les représentations ainsi construites de $A \rtimes_\alpha \Gamma$ ont même noyau et définissent donc la même C^*-algèbre quotient appelée *produit croisé réduit.*

8.2.2 Produit croisé von Neumann

Soient H un espace hilbertien, Γ un groupe, $A \subset \mathcal{L}(H)$ une algèbre de von Neumann et $(u_g)_{g\in\Gamma}$ un homomorphisme de Γ dans le groupe des unitaires de H. On suppose que, pour $g \in \Gamma$ et $a \in A$, on a $u_g a u_g^{-1} \in A$. On pose $\alpha_g(a) = u_g a u_g^{-1}$. L'application $\alpha_g : A \to A$ est continue lorsqu'on munit A d'une de ses topologies : normique, forte, *-forte, faible, ultrafaible...

Posons $\mathcal{H} = \ell^2(\Gamma; H)$. Pour $a \in A$, $g, h \in \Gamma$ et $\xi \in \mathcal{H}$, on pose :

$$(\pi(a)\xi)(g) = a(\xi(g)) \quad \text{et} \quad (V_g\xi)(h) = u_g\xi(g^{-1}h).$$

Pour $a \in A$, $g, h \in \Gamma$, V_g est unitaire, on a $V_gV_h = V_{gh}$ et $V_g\pi(a) = \pi(\alpha_g(a))V_g$.

L'algèbre de von Neumann $\Big(\pi(A) \cup \{V_g;\ g \in \Gamma\}\Big)''$ se note $A \rtimes_\alpha \Gamma$.

On peut en fait décrire des éléments du commutant de $A \rtimes_\alpha \Gamma$.

Pour $g \in \Gamma$, notons W_g l'unitaire de $\mathcal{H}$ donné par $(W_g\xi)(h) = \xi(hg)$. Pour $T \in A'$, notons $\varpi(T) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ donné par $(\varpi(T)\xi)(g) = u_gTu_g^*\xi(g)$.

On vérifie que $[V_g, W_h] = [\pi(a), W_h] = [V_g, \varpi(T)] = [\pi(a), \varpi(T)] = 0$. On peut démontrer que $\Big(\pi(A) \cup \{V_g;\ g \in \Gamma\}\Big)' = \Big(\varpi(A') \cup \{W_g;\ g \in \Gamma\}\Big)''$.

Supposons que A est commutative. On peut choisir dans A sous-C^*-algèbre séparable faiblement dense $C(X)$ invariante par l'action de Γ. Donc Γ opère par difféomorphismes de X, et $A = L^\infty(X, \mu)$ où μ est une mesure finie sur X. On va supposer que l'action de Γ est (essentiellement) libre dans X, *i.e.* que pour $g \neq 1$, l'ensemble $\{x \in X;\ gx = x\}$ est μ-négligeable.

Pour qu'on ait une action de Γ sur $A = L^\infty(X, \mu)$ agissant sur $H = L^2(X, \mu)$, on suppose que la mesure $g.\mu$ est équivalente à μ pour tout $g \in \Gamma$. On a donc $g.\mu = \delta_g\mu$ où $\delta_g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$, avec $\delta_g(x) \in \mathbb{R}_+^*$ presque partout. On a donc, pour toute fonction borélienne bornée (*resp.* borélienne positive) sur X

$$\int_X f(gx)d\mu(x) = \int_X \delta_g(x)f(x)\, d\mu(x).$$

Pour $\xi \in H = L^2(X, \mu)$ et $g \in \Gamma$, notons $u_g\xi$ la classe de la fonction définie par $(u_g\xi)(x) = \delta_g^{1/2}(x)\xi(g^{-1}x)$.

Alors u_g est unitaire, et $u_{gh} = u_gu_h$.

On fait agir $A = L^\infty(X, \mu)$ sur $L^2(X, \mu)$ par multiplication. Pour $g \in \Gamma$ et $f \in L^\infty(X, \mu)$, on a $u_gfu_g^* = \alpha_g(f)$, où $\alpha_g(f)(x) = f(g^{-1}x)$.

L'espace hilbertien $\mathcal{H} = \ell^2(\Gamma; H)$ s'identifie à $L^2(\Gamma \times X; \varepsilon \otimes \mu)$ où ε est la mesure de comptage sur Γ.

Dans ce cas le représentations définies ci-dessus, s'expriment pour $f \in A = A'$, $g \in \Gamma$, $\xi \in L^2(\Gamma \times X; \varepsilon \otimes \mu)$ et $(h, x) \in \Gamma \times X$ par :

- $(\pi(f)\xi)(h, x) = f(x)\xi(h, x)$,
- $(V_g\xi)(h, x) = \delta_g^{1/2}\xi(g^{-1}h, g^{-1}x)$

- $(W_g\xi)(h,x) = \xi(hg,x)$
- $(\varpi(f)\xi)(h,x) = f(h^{-1}x)\xi(h,x)$.

Soit $\xi \in L^2(X,\mu)$ une fonction (presque) partout non nulle. Notons $v \in \ell^2(\Gamma \times X, \varepsilon \otimes \mu)$ la fonction définie par $v(e,x) = \xi(x)$ et $v(h,x) = 0$ pour $h \neq e$.

Le vecteur v est totalisateur pour l'algèbre engendrée par $\varpi(A)$ et $\{W_g;\ g \in \Gamma\}$, donc il est séparateur pour $B = A \rtimes \Gamma$.

Soit $b \in B$.

Remarquons que, pour $f \in A$, on a $\pi(f)v = \varpi(f)v$, donc $b\pi(f)v = \varpi(f)bv$. Donc b commute à $\pi(A)$ si et seulement si $\pi(f)$ et $\varpi(f)$ coïncident sur bv. C'est à dire $f(h^{-1}x)\xi(h,x) = f(x)\xi(h,x)$ pour tout h tout f et presque tout x. On en déduit que :

8.10 Proposition. *a) On a $b \in A' \cap B$ si et seulement si la fonction bv est essentiellement nulle sur $\{(h,x);\ h^{-1}x \neq x\}$.*

b) Si l'action de Γ dans X est (essentiellement) libre*, c'est à dire si, pour tout $h \in \Gamma$, $h \neq e$, l'ensemble $\{x \in X;\ hx = x\}$ est de mesure nulle, alors $A' \cap B = A$.*

On en déduit :

8.11 Proposition. *Si l'action de Γ est libre, le centre de $L^\infty(X,\mu) \rtimes_\alpha \Gamma$ est $L^\infty(X,\mu)^\Gamma$.* □

8.12 Définition. Soit Γ un groupe agissant sur un espace mesuré (X,μ) en préservant la classe de mesure. On dit que l'action est *ergodique* si toute partie mesurable Γ invariante de X est de mesure nulle ou son complémentaire est de mesure nulle.

8.13 Corollaire. *Si l'action de Γ est libre, $L^\infty(X,\mu) \rtimes_\alpha \Gamma$ est un facteur si et seulement si l'action est ergodique.* □

9 Classification des facteurs en types

Dans ce paragraphe, nous présentons la classification (par Murray et von Neumann) des facteurs en types I, II et III.

9.1 Le treillis des projecteurs

Soient H un espace de Hilbert séparable. On appelle *projecteur* un projecteur orthogonal. En d'autres termes un projecteur est idempotent et autoadjoint, *i.e.* un élément $p \in \mathcal{L}(H)$ tel que $p^2 = p^* = p$.

Remarquons que si p, q sont des projecteurs, on a l'équivalence entre :

(i) $p \leqslant q$; (ii) $(1-q) \leqslant (1-p)$; (iii) $pH \subset qH$; (iv) $pq = qp = p$.

L'ensemble ordonné des projecteurs est un *treillis complet* : tout ensemble $\mathcal{P}$ de projecteurs admet une borne inférieure $\bigwedge_{p\in\mathcal{P}} p$ (la projection sur $\bigcap_{p\in\mathcal{P}} pH$) et une borne supérieure $\bigvee_{p\in\mathcal{P}} p$ (la projection sur $\overline{\sum_{p\in\mathcal{P}} pH}$).

Soient $p, q \in M$ deux projecteurs. Le projecteur $p \wedge q$ sur $pH \cap qH$ et le projecteur $p \vee q$ sur l'adhérence de $pH + qH$ qui est l'image de $p+q$ s'écrivent $p \wedge q = \chi(p+q)$ et $p \vee q = \chi'(p+q)$ où $\chi, \chi' : [0,2] \to \{0,1\}$ sont les fonctions boréliennes définies par $\chi(t) = 1 \iff t = 2$ et $\chi'(t) = 1 \iff t \neq 0$.

Plus généralement, si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de projecteurs, le projecteur $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} p_n$ sur $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} p_nH$ et $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} p_n$ sur $\overline{\sum_{n\in\mathbb{N}} p_nH}$ sont $\chi(x)$ et $\chi'(x)$ où $x = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k}p_k$.

Enfin, si $\mathcal{P}$ est un ensemble quelconque de projecteurs de H, il existe une partie dénombrable $D_1 \subset \bigcup_{p\in\mathcal{P}} pH$ et une partie dénombrable $D_2 \subset \bigcup_{p\in\mathcal{P}} (1-p)H$ telles que

$$\overline{\mathrm{vect} D_1} = \overline{\sum_{p\in\mathcal{P}} pH} \quad \text{et} \quad \overline{\mathrm{vect} D_2} = \overline{\sum_{p\in\mathcal{P}} (1-p)H}.$$

Choisissant pour chaque $x \in D_1$ (*resp.* $x \in D_2$) un projecteur $p \in \mathcal{P}$ tel que $x \in pH$ (*resp.* $x \in (1-p)H$), on construit une suite (p_n) dans $\mathcal{P}$ telle que $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} p_n = \bigwedge_{p\in\mathcal{P}} p$ et $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} p_n = \bigvee_{p\in\mathcal{P}} p$.

On en déduit immédiatement :

9.1 Proposition. *L'ensemble des projecteurs d'une algèbre de von Neumann est stable par $\bigwedge$ et $\bigvee$.*

9.2 Isométries partielles

Soit H un espace hilbertien.

Pour $u \in \mathcal{L}(H)$. Les conditions suivantes sont équivalentes : Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $u = uu^*u$; (ii) $u^* = u^*uu^*$; (iii) $u^*u = (u^*u)^2$; (iv) $uu^* = (uu^*)^2$.

En effet, (i) et (ii) se déduisent l'un de l'autre par passage aux adjoints.
(i) $\Rightarrow$ (iii) est clair. Si (iii) est satisfait $T = u(1 - u^*u)$ vérifie $u^*T = 0$ donc $T^*T = 0$ et $T = 0$, d'où (i). Enfin, remplaçant u par u^* dans (i) $\iff$ (iii), on en déduit que (ii) $\iff$ (iv).

Un opérateur qui vérifie les conditions équivalentes ci-dessus est appelé une *isométrie partielle.* Soit $u \in \mathcal{L}(H)$ une isométrie partielle. De la condition (ii) (*resp.* (i)) il résulte que u^* et u^*u (*resp.* u et uu^*) ont même image. On appelle support initial (*resp.* final) de l'isométrie partielle $u \in \mathcal{L}(H)$ le sous-espace u^*H (*resp.* uH) de H.

Si u est une isométrie partielle, posons $\Gamma_u = \{(\xi, u\xi),\ \xi \in u^*H\}$. C'est un sous-espace fermé de $H \times H$. Remarquons que si $(\xi, \eta) \in \Gamma_u$, alors $\|\xi\| = \|\eta\|$. De plus, si $(\xi, \eta) \in H^2$ sont tels que $\eta = u\xi$ et $\|\xi\| \leqslant \|\eta\|$ alors $(\xi, \eta) \in \Gamma_u$. Le projecteur orthogonal sur Γ_u est $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} u^*u & u^* \\ u & uu^* \end{pmatrix}$.

9.2 Remarque. Tout sous espace fermé $E \subset H^2$ tel que l'on ait $\|\xi\| = \|\eta\|$ pour tout $(\xi, \eta) \in E$ est de la forme Γ_u où u est une isométrie partielle.

9.3 Lemme. *Soient $u, v \in \mathcal{L}(H)$ des isométries partielles. Les conditions suivantes sont équivalentes : (i) $uu^* = vu^*$; (ii) $u^*u = u^*v$; (iii) $u = vu^*u$; (iv) $u = uu^*v$. (v) $\Gamma_u \subset \Gamma_v$.*

Démonstration. En effet, on passe de (i) à (iii) en multipliant à droite par u et de (iii) à (i) en multipliant à droite par u^*, d'où (i) $\iff$ (iii). De même, en multipliant à gauche par u et u^*, on voit que (ii) $\iff$ (iv).

Si l'assertion (iii) est satisfaite, pour fout $(\xi, \eta) \in \Gamma_u$, on a $\xi = u^*u\xi$, donc $v\xi = \eta$. Puisque $\|\xi\| = \|\eta\|$, il vient $(\xi, \eta) \in \Gamma_v$, donc (v).

Si (v) est satisfaite, pour tout $\xi \in H$, on a $(u^*\xi, uu^*\xi) \in \Gamma_u \subset \Gamma_v$, donc $uu^*\xi = vu^*\xi$, d'où (i).

On a (iv) $\iff u^*u = v^*u$ et, par (iii) $\iff$ (v) appliqué à u^* et v^*, on trouve que (iv) est équivalent à $\Gamma_{u^*} \subset \Gamma_{v^*}$ - qui lui même est équivalent à (v) (*via* la symétrie $(\xi, \eta) \mapsto (\eta, \xi)$). $\square$

Si ces conditions sont satisfaites, on dit que v prolonge u et on écrit $u \prec v$. La relation $\prec$ est une relation d'ordre sur l'ensemble des isométries partielles de E dans F.

Si $u \prec v$, alors $(v-u)^*u$ et $u(v-u)^*$ sont nuls d'où il ressort que $(v-u)(v-u)^*(v-u) = vv^*v - vu^*v = v-u$; donc $v-u$ est une isométrie partielle et il est clair que ses supports initial et final sont orthogonaux à ceux de u. Réciproquement, si w est une isométrie partielle de supports initial et final orthogonaux à ceux de u, alors $u+w$ est une isométrie partielle et $u \prec u+w$. En d'autres termes, l'application qui à v associe $v-u$ est une bijection de l'ensemble des isométries partielles v prolongeant u dans l'ensemble des isométries partielles $w \in \mathcal{L}(H)$ de domaine initial et final respectivement inclus dans $\ker u$ et dans $\ker u^*$.

9.3 Comparaison des projecteurs d'un algèbre de von Neumann

Soit H un espace de Hilbert séparable. On fixe dans ce paragraphe une algèbre de von Neumann M et on note $Proj(M) = \{p \in M;\ p^* = p^2 = p\}$ l'ensemble de ses projecteurs..

9.4 Définition. Soient $p, q \in M$ deux projecteurs.

a) On dit que p et q sont *équivalents* et on écrit $p \sim q$ s'il existe $u \in M$ tel que $u^*u = p$ et $uu^* = q$.

b) On écrit $p \prec q$ s'il existe $u \in M$ tel que $u^*u = p$ et $uu^* \leqslant q$.

On a évidemment :

9.5 Proposition. *L'équivalence des projecteurs est une relation d'équivalence. La relation $\prec$ est une relation de préordre (réflexive et transitive)*

Démonstration. On a $p \sim p$ (prendre $u = p$) ; il est clair que $\sim$ est symétrique (on remplace u par u^*).

Si $p = u^*u$, $q = v^*v = uu^*$ (*resp.* $uu^* \leqslant q = v^*v$) et $r = vv^*$ (*resp.* $vv^* \leqslant r$), on a $(vu)^*vu = u^*(v^*v)u = (u^*u)^2 = p$ et de même $(vu)(vu)^* = r$ (*resp.* $vu(vu)^* = v(uu^*)v^* \leqslant (vv^*)^2 = vv^* \leqslant r$). $\square$

À l'aide de considérations *alla* Cantor-Bernstein on a :

9.6 Proposition. *Si $p \prec q$ et $q \prec p$ alors $p \sim q$.*

Démonstration. Soient u, v avec $u^*u = p \geqslant vv^*$ et $v^*v = q \geqslant uu^*$. Posons $e_0 = p - vv^*$ et $f_0 = q - uu^*$ et pour $k \in \mathbb{N}$, $e_{2k} = (vu)^k e_0((vu)^k)^*$, $f_{2k} = (uv)^k f_0((uv)^k)^*$, $e_{2k+1} = vf_{2k}v^*$ et $f_{2k+1} = ue_{2k}u^*$. Enfin, posons $P = \sum_{k=0}^{+\infty} e_{2k+1}$ et $U = u(p-P) + v^*P$. On a $U^*U = p$ et $UU^* = q$. $\square$

Donc l'ensemble $Dim(M) = Proj(M)/\sim$ des classes d'équivalence de projecteurs de M est un ensemble ordonné. Pour $p \in Proj(M)$, on note $[p]$ sa classe dans $Dim(M) = Proj(M)/\sim$.

Enfin, on peut ajouter certaines classes de projecteurs de la manière suivante :

9.7 Proposition. *Soient $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de projecteurs dans M. On suppose que les projecteurs $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$) sont deux à deux orthogonaux (i.e. pour $m \neq n$ on a $p_np_m = 0 = q_nq_m$).*

a) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $p_n \prec q_n$ alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n \prec \sum_{n\in\mathbb{N}} q_n$.

b) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $p_n \sim q_n$ alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n \sim \sum_{n\in\mathbb{N}} q_n$.

Ici $\sum p_n = \bigvee p_n$.

Démonstration. En effet, si $u_n \in M$ est une isométrie partielle avec $u_n^* u_n = p_n$ et $u_n u_n^* \leqslant q_n$ (*resp.* $u_n u_n^* = q_n$) alors $u = \sum u_n$ est une isométrie partielle (telle que $\Gamma_u = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_{u_n}$) qui satisfait $u^*u = \sum p_n$ et $uu^* \leqslant \sum q_n$ (*resp.* $uu^* = \sum q_n$). □

Convenons ici de dire que la famille $(x_0, \dots x_{n-1})$ et plus généralement $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est sommable ≫ s'il existe des projecteurs p_j de classe x_j deux à deux orthogonaux. Dans ce cas, la somme $\sum x_j = \left[\sum p_j\right]$ est donc bien définie.

L'addition partielle ainsi définie est commutative et associative.

9.4 Cas des facteurs

Nous allons à présent démontrer que, si M est un facteur, il y a peu de choix possibles pour cet ensemble ordonné.

Démontrons d'abord que cet ordre est total.

9.8 Lemme. *Soit $p \in M$ un projecteur non nul. Le sous-espace $E = \{\xi \in H;\ \forall a \in M,\ pa\xi = 0\}$ est stable par M et par M'. Il est nul.*

Démonstration. Si $b \in M$ et $\xi \in E$, alors pour tout $a \in M$, on a $ab \in M$, donc $pab\xi = 0$. Cela prouve que $b\xi \in E$.

Si $b \in M'$ et $\xi \in E$, alors pour tout $a \in M$, on a $pab\xi = bpa\xi = 0$. Cela prouve que $b\xi \in E$.

Ces deux assertions prouvent que le projecteur orthogonal p_E sur E est dans M' et dans M. Il est scalaire. Comme $p \neq 0$, il vient $p_E = 0$. □

9.9 Lemme. *Si p, q sont deux projecteurs non nuls de M, il existe une isométrie partielle $u \in M$ non nulle avec $u^*u \leqslant p$ et $uu^* \leqslant q$.*

Démonstration. Soit $\xi \in pH$ non nul. D'après le lemme 9.8, il existe $a \in M$ tel que $qa\xi \neq 0$. Alors $b = qap$, n'est pas nul. Si $b = u|b|$ est sa décomposition polaire, alors $uu^* \leqslant q$ et $u^*u \leqslant p$ (l'image de u (*resp.* de u^*) est l'adhérence de celle de b (*resp.* de b^*). Elle est incluse dans qH (*resp.* pH). □

9.10 Proposition. *Si p, q sont deux projecteurs de M, alors $p \prec q$, ou $q \prec p$.*

Démonstration. Munissons l'ensemble $V_{q,p}$ des isométries partielles $u \in qMp$ de l'ordre $u \prec v$ (voir lemme 9.3).

Démontrons que cet ordre est inductif. Soit $\mathcal{F} \subset V_{q,p}$ est une partie totalement ordonnée non vide. Posons $E = \overline{\bigcup_{u\in\mathcal{F}} \Gamma_u}$. Comme $\mathcal{F}$ est totalement ordonné et non vide, c'est un sous-espace vectoriel de H^2. Pour $(\xi, \eta) \in E$ on a $p\xi = \xi$, $q\eta = \eta$ et $\|\xi\| = \|\eta\|$. Donc il existe $v \in \mathcal{L}(H)$ une isométrie partielle telle que $v = qvp$ et $E = \Gamma_v$. Enfin, comme pour tout $u \in \mathcal{F}$, le projecteur $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} u^*u & u^* \\ u & uu^* \end{pmatrix}$ sur Γ_u est dans l'algèbre de von Neumann $M_2(M)$, il en va de même pour leur sup, le projecteur sur Γ_v. Donc $v \in M$.

Enfin, soit u un élément de $V_{q,p}$. Si $q \neq uu^*$ et $p \neq u^*u$, il existe d'après le lemme 9.9 une isométrie partielle w non nulle telle que $w^*w \leqslant p - u^*u$ et $ww^* \leqslant q - uu^*$. Alors $u \prec u + w$ et u n'est pas maximal. Si u est maximal, on a donc $u^*u = p$ ou $uu^* = q$. □

La classification en trois types est basée sur la notion suivante :

9.11 Définition. Soit $p \in M$ un projecteur.

a) On dit que p est *minimal* si $p \neq 0$ et pour tout projecteur q tel que $0 \leqslant q \leqslant p$ on a $q = 0$ ou $q = p$.

b) On dit que p est *infini* s'il existe un projecteur q tel que $0 \leqslant q \leqslant p$ distinct de p et équivalent à p.

c) On dit que p est fini s'il n'est pas infini.

9.12 Proposition. *a) Si p est un projecteur minimal, alors $p \prec q$ pour tout projecteur q non nul.*

b) Si p est un projecteur infini, alors $q \prec p$ pour tout projecteur q.

c) Deux projecteurs minimaux (resp. infinis) sont équivalents

Démonstration. a) est évident.

b) Si p est infini, alors écrivons $p = u^*u \geqslant uu^*$ avec $uu^* \neq p$. Pour $k \geqslant 1$, posons $P_0 = p$ et pour $k \geqslant 1$, $P_k = u^k(u^*)^k$ et pour $k \in \mathbb{N}$ posons $p_k = P_k - P_{k+1}$. On a $p_k = u^k p_0 (u^*)^k$ donc les p_k sont des projecteurs équivalents. Les p_k sont deux à deux orthogonaux et l'on a $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k \leqslant p$.

Soit (a_k) une suite fortement dense dans la boule unité M. D'après le lemme 9.8, pour tout $\xi \in H$ il existe k tel que $p_0 a_k \xi \neq 0$. On en déduit que $T = \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-k} u^k p_0 a_k$ est injectif. La décomposition polaire $T = v|T|$ donne une isométrie telle que $v^*v = 1$ et $vv^* \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} p_k \leqslant p$.

c) résulte de a) (*resp.* b) et de la proposition 9.6. □

9.5 Définition des types

9.13 Définition. Un facteur M est dit de

Type I s'il existe un projecteur minimal dans M.

Type II s'il n'y a pas de projecteur minimal, mais il y a des projecteurs finis non nuls ;

- si tous les projecteurs sont finis, M est de type II_1 ;
- s'il y a aussi des projecteurs infinis, M est de type II_∞.

Type III si tous les projecteurs non nuls sont infinis.

9.14 Proposition. *Si M est de type I, alors $M \simeq M_n(\mathbb{C})$ (type I_n) ou $M \simeq \mathcal{L}(H)$ (type I_∞).*

Démonstration. Soit p_1 un projecteur minimal. Alors $p_1 M p_1 = \mathbb{C} p_1$.

Si $M = \mathbb{C}$ on a fini, sinon, $p_1 \prec (1 - p_1)$ et on construit p_2 orthogonal à p_1 et équivalent à p_1. On continue ainsi jusqu'à ce que cela s'arrête, ou indéfiniment...

Dans le cas ou cela s'arrête on a des projecteurs $p_1, \ldots, p_n$ minimaux, donc equivalents tels que $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$. On écrit u_j avec $u_j^* u_j = p_j$ et $u_j u_j^* = p_1$ avec $u_1 = p_1$ et l'on pose $e_{i,j} = u_i^* u_j$. On a ainsi $e_{i,j} e_{k,\ell} = \delta_{j,k} e_{i,\ell}$ et un morphisme de $M_n(\mathbb{C})$ dans M. Enfin $p_i M p_j$ est de dimension 1.

Si cela ne s'arrête pas on obtient juste des p_j pour tout j. On pose $p = \sum_{j=1}^{+\infty} p_j$ Alors p est infini donc équivalent à 1. Quitte à remplacer p_j par $u p_j u^*$, où $uu^* = 1$ et $u^* u = p$, on peut supposer $\sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1$.

On conclut comme dans le cas fini. □

9.6 Comparaison des projecteurs dans le cas de type II_1

Dans ce paragraphe, on suppose que M est de type II_1 (c'est à dire fini et de dimension infinie). Le but est de calculer l'ensemble totalement ordonnée $Dim(M) = Proj(M)/\sim$.

9.15 Lemme. *Soient $p, q \in Proj(M)$.*

a) Si $p \prec q$ et $1 - p \prec 1 - q$ alors $p \sim q$ et $(1-p) \sim (1-q)$.

b) Si $p \sim q$ alors $1 - p \sim 1 - q$ et il existe un unitaire $U \in M$ qui conjugue p et q.

c) On a $p \prec q$ si et seulement si $1 - q \prec 1 - p$.

Démonstration. a) Supposons que $p \prec q$ et $1 - p \prec 1 - q$. Soient $u, v \in M$ tels que $u^* u = p$, $uu^* \leqslant q$ et $v^* v = (1-p)$, $vv^* \leqslant (1-q)$. Alors $(u+v)^*(u+v) = 1$ et $(u+v)(u+v)^* = 1 - (q - uu^* + (1-q) - vv^*)$; comme 1 est fini, $(u+v)(u+v)^* = 1$, donc $uu^* = q$ et $vv^* = 1 - q$, soit $p \sim q$ et $(1-p) \sim (1-q)$

b) Quitte à les échanger, on peut supposer que $1 - p \prec 1 - q$. Alors d'après a), $1 - p \sim 1 - q$.

c) Si $p \sim q$ alors $(1-p) \sim (1-q)$ donc $(1-q) \prec (1-p)$. Si $p \prec q$ et p n'est pas équivalent à q, on ne peut avoir $1 - p \prec 1 - q$ d'après a), donc nécessairement $1 - q \prec 1 - p$.
La réciproque s'en déduit en remplaçant p et q par $(1-q)$ et $(1-p)$ respectivement. □

9.16 Propriétés de l'addition. **Simplifiabilité.** Si $x + y = x + z$ alors $y = z$ (d'après le lemme 9.15.b). Cela permet de définir $x - y$ si $x \geqslant y$. En particulier, la classe $[1-p]$ ne dépend que de $[p]$ on la note $1 - [p]$.

Propriété d'Archimède. Si $x \neq 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que x soit n fois ajoutante à lui-même, mais pas $n+1$ fois (sinon 1 serait infini). On a alors $nx \leqslant 1$ mais $x \geqslant 1 - nx$.

Limite nulle. Nous dirons que (x_n) tend vers 0 si pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$ on ait $kx_n \leqslant 1$. De plus, il existe une suite strictement décroissante (comme il n'y a pas de projecteurs minimaux) qui tend vers 0 (à chaque n, choisir un projecteur $p_{n+1} \leqslant p_n$ distinct de 0 et de p_n et tel que $p_{n+1} \prec p_n - p_{n+1}$ - quitte à remplacer p_{n+1} par $p_n - p_{n+1}$).

Suites adjacentes. Si x_n est croissante, y_n est décroissante et $y_n - x_n \to 0$, alors il existe un et un seul $x \in Dim(M)$ avec $x_n \leqslant x \leqslant y_n$.

9.17 Lemme. *a) Si (p_n) est une suite croissante de projecteurs et $p = \lim p_n$ (limite forte), alors $[p]$ est la borne supérieure des $[p_n]$.*

b) Si (p_n) est une suite décroissante de projecteurs de limite forte nulle, alors $[p_n] \to 0$.

Démonstration. a) Il est clair que $[p]$ majore les p_n ; on doit démontrer que c'est le plus petit des majorants. On doit donc démontrer que, si q est un projecteur tel que $p_n \prec q$ pour tout n, alors $p \prec q$. On construit par récurrence une suite u_n croissante d'isométries partielles telles que $u_n^* u_n = p_n$ et $u_n u_n^* \leqslant q$. Si u_n est construit, on a $p_{n+1} - p_n \prec q - u_n u_n^*$. On prolonge donc u_n par une isométrie de support initial $p_{n+1} - p_n$ et support final $\leqslant q - u_n u_n^*$. Puis on prend le sup des u_n.

b) Dans ce cas $1 - p_n \to 1$ donc $\sup(1 - [p_n]) = 1$ et $\inf[p_n] = 0$. □

On en déduit qu'il existe un unique isomorphisme d'ensembles ordonnés compatible avec l'addition partielle entre $Dim(M)$ et $[0,1]$.

Pour cela, on démontre :

9.18 Lemme. *Pour tout $x \in Dim(M)$, il existe un et un seul $y \in Dim(M)$ avec $x = 2y$.*

Démonstration. **Existence.** Soit P un projecteur ; on note

$$Q = \{u \in Isom(M);\ u^2 = 0;\ u^*u \leqslant P \text{ et } uu^* \leqslant P\}$$

avec l'ordre $\prec$. Cet ensemble est inductif. Un élément maximal satisfait $u^*u + uu^* = P$.

Unicité. Si $y \prec z$, alors $2z = 2y + 2(z - y)$. □

On définit ainsi $x/2^n$ et enfin $2^{-n} = 1/2^n$.

Puis on démontre :

Soit $x \in Dim(M)$. Il existe une unique suite $(\varepsilon_k) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ telle que l'on ait $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k 2^{-k} \leqslant x < \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k 2^{-k}$.

Pour finir cette partie, on a :

9.19 Proposition. *Soit p_n une suite de projecteurs dans M. Si $[p_n] \to 0$ alors p_n tend vers 0 fortement.*

Démonstration. Sinon, il existe $\xi \in H$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et une partie infinie D de $\mathbb{N}$ telle que $\|p_n \xi\| \geqslant \alpha$. Quitte à remplacer D par un sous-ensemble infini, on peut supposer que la famille $([p_n])_{n \in D}$ est sommable (dans $Dim(M)$). Pour $m \in D$, posons $q_m = \displaystyle\bigvee_{n \in D,\ n \geqslant m} p_n$. Remarquons que l'on a $[q_m] \leqslant \displaystyle\sum_{n \in D,\ n \geqslant m} [p_n]$. Donc $[q_m]$ décroit vers 0. Mais q_m est une suite décroissante de projecteurs. Il vient $q_n \to 0$ fortement. □

9.7 Fonction dimension

9.20 Théorème. *Soit M un facteur dans un espace de Hilbert séparable. Il existe une fonction dimension $D : Proj(M) \to [0, +\infty]$, unique modulo la multiplication par un scalaire près telle que l'on ait $p \sim q \iff D(p) = D(q)$ et si $pq = 0$ alors $D(p + q) = D(p) + D(q)$ (avec la convention $a + (+\infty) = +\infty$.)*

Dans le cas de type I on normalise cette dimension en posant $D(p) = 1$ pour p minimal et l'on a $D(M) = \{0, \dots, n\}$ pour un $n \in \mathbb{N}$ (type I_n) ou $D(M) = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ (type I_∞).

Dans le cas de type II_1 on normalise en posant $D(1) = 1$ et l'on a $D(M) = [0, 1]$.

Dans le cas de type II_∞ on a $D(M) = [0, +\infty]$.

Dans le cas de type III, $D(M) = \{0, +\infty\}$.

On connait déjà ce théorème dans les cas de type I, II_1 et III. Pour bien comprendre le cas de type II_∞, il faut démontrer que la somme de deux projecteurs finis est finie. Cela résulte de l'« additivité de la trace ».

10 Additivité de la trace

Le but de ce chapitre est de démontrer que tout facteur de type II_1 admet une (unique) trace : une application $\tau : M \to \mathbb{C}$ ultrafaiblement continue, positive, telle que $\tau(xy) = \tau(yx)$ pour tous $x, y \in M$, ou, ce qui revient au même, $\tau(uxu^*) = \tau(x)$ pour tout $x \in M$ et tout unitaire $u \in M$.

10.1 Théorème de Ryll-Nardzewski

Nous utilisons le théorème de point fixe de Ryll-Nardzewski que nous commençons par énoncer.

Soient E un espace vectoriel normé, $K \subset E$ une partie convexe non vide, compacte pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$.

10.1 Théorème de Ryll-Nardzewski. *Tout groupe d'isométries affines de K admet au moins un point fixe.*

Rappelons qu'un point x d'un convexe C est dit *extremal* si pour tous $y, z \in C$ tels que $x = \frac{1}{2}(y+z)$, on a $x = y = z$. Il revient aussi au même de dire que si $x = \sum_{i=1}^{n} t_i y_i$ avec $y_i \in C$ et $t_i \in \mathbb{R}_+^n$ avec $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, alors $x = y_i$ pour tout i tel que $t_i \neq 0$.

Avant de commencer la démonstration du théorème de Ryll-Nardzewski, démontrons le :

10.2 Théorème de Krein-Milman. *L'enveloppe convexe des points extrémaux de K est dense dans K.*

Démonstration. Une partie F de K est dite *extrémale* si $\forall y, z \in K$, $\frac{1}{2}(y+z) \in F \Rightarrow y \in F$ et $z \in F$. Bien sûr, K est extrémale... et si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille totalement ordonnée par l'inclusion de parties extrémales, faiblement fermées, non vides de K, alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est extrémale, faiblement fermée, non vide.

Donc - d'après le lemme de Zorn - toute partie extrémale, faiblement fermée non vide contient une partie extrémale, faiblement fermée, non vide minimale. Or si F est une partie extrémale, faiblement fermée non vide minimale, alors pour toute forme linéaire continue ℓ, l'ensemble $\{x \in F;\ \ell(x) = \inf_{y\in F} \ell(y)\}$ est, par minimalité, égale à F ; donc ℓ est constante sur F. On en déduit (par Hahn Banach) que toute partie extrémale, faiblement fermée, non vide minimale est donc réduite à un point extrémal.

Remarquons enfin que si $C \subset K$ est une partie convexe fermée, non vide distincte de K, il existe $x \in K \setminus C$ et une forme linéaire ℓ telle que $\ell(y) > \ell(x)$ pour tout $y \in C$. Alors $\{z \in K;\ \ell(z) = \inf_{y\in F} \ell(y)\}$ est extrémale, faiblement fermée, non vide, donc contient une partie extrémale, faiblement fermée, non vide minimale : un point extrémal. On en déduit que C n'est pas l'enveloppe convexe des points extrémaux de K. $\square$

Nous utiliserons aussi le résultat simple suivant :

10.3 Proposition. *Si K est l'enveloppe convexe fermée d'un ensemble C, alors tout point extrémal de K est contenu dans l'adhérence faible de C.*

Démonstration. Soit $x \in K$ un point extrémal. Soit H un demi-espace ouvert contenant x. Alors

$$K = \{(sy + (1-s)z);\ y \in \overline{co}(C \cap H); y \in \overline{co}(C \setminus H); s \in [0,1]\}.$$

Comme x est extrémal, $x \in \overline{co}(C \cap H)$ - et c'est un point extrémal de ce convexe.

A l'aide d'une récurrence immédiate, on en déduit que x est contenu dans l'adhérence de l'enveloppe convexe de $C \cap H_1 \cap \ldots \cap H_k$ pour tout ensemble fini de demi-espaces ouverts contenant x. En particulier, $C \cap H_1 \cap \ldots \cap H_k$ n'est pas vide : tout voisinage de x rencontre C. □

Démonstration du théorème de Ryll-Nardzewski. Pour toute isométrie T de K, notons K^T l'ensemble de ses points fixes. Il s'agit de démontrer que l'ensemble $\bigcap_T K^T$ n'est pas vide. Comme ces ensembles sont fermés, par compacité de K il suffit de démontrer qu'une intersection finie n'est pas vide.

On peut donc se restreindre à un ensemble fini d'isométries de K, qui engendre un groupe dénombrable $\mathcal{S}$ d'isométries de K.

D'après le lemme de Zorn, il existe une partie convexe, compacte, non vide de K stable par $\mathcal{S}$ et minimale pour l'inclusion. Quitte à remplacer K par cette partie, on peut supposer que K elle-même est minimale.

Dans ce cas, pour tout $x \in K$, K est égal à l'enveloppe convexe fermée de $\{Tx;\ T \in \mathcal{S}\}$ et, comme $\mathcal{S}$ est dénombrable, K est séparable (normiquement).

Soit aussi $X \subset K$ une partie non vide, faiblement fermée, stable par $\mathcal{S}$ et minimale pour l'inclusion. Démontrons que X est réduite à un point. Nous commençons par montrer que les topologies normique et faible coïncident sur X. Cela résulte immédiatement du lemme suivant :

10.4 Lemme. *Pour tout $\varepsilon > 0$, tout $x \in X$, admet un voisinage faible dans X de diamètre $\leqslant \varepsilon$.*

Démonstration. Comme X est (normiquement) séparable, il existe un ensemble dénombrable $D \subset X$ tel que $X = \bigcup_{d \in D} (B_d \cap X)$ où l'on a posé $B_d = \{y \in E;\ \|y - d\| \leqslant \varepsilon/2\}$. Les boules fermées B_d étant convexes et normiquement fermés elles sont faiblement fermées. Le théorème de Baire (appliqué au compact X) implique alors qu'il existe $d \in D$ et un ouvert faible W de X non vide tel que $W \subset B_d$. Pour tout $x \in X$, l'adhérence faible de $\{Tx;\ T \in \mathcal{S}\}$ est stable par $\mathcal{S}$, donc c'est X. Il existe donc $T \in \mathcal{S}$ tel que $Tx \in W$. Alors, $T^{-1}W$ est le voisinage cherché. □

Fin de la démonstration du théorème de Ryll-Nardzewski. Comme les topologies faible et normique coïncident sur X, X est normiquement compact. Notons $p : X \times X \to K$ l'application $(x, y) \mapsto \dfrac{x+y}{2}$. Pour tout $\alpha > 0$, l'ensemble $Y_\alpha = \{(x, y) \in X \times X;\ \|x - y\| \geqslant \alpha\}$ est compact, donc l'ensemble $p(Y_\alpha)$ est une partie compacte invariante par $\mathcal{S}$ de K. Elle ne contient aucun point extremal de K donc son enveloppe convexe fermée non plus (d'après la prop. 10.3). Elle est donc vide par minimalité de K. Donc $Y_\alpha = \emptyset$ pour tout $\alpha > 0$ et X est donc réduit à un point. □

10.2 Formes ultrafaiblement continues

Le but de cette section est de caractériser les formes positives ultrafaiblement continues dans le cas de type II_1.

10.5 Théorème. *Soit φ une forme positive sur M de type II_1. Alors on a l'équivalence entre :*

(i) φ est ultrafaiblement continue.

(ii) φ *est normale : si* (p_n) *est une famille de projecteurs deux à deux orthogonaux de* M*, alors* $\varphi(\sum p_n) = \sum(\varphi(p_n))$.

(iii) Si p_n *une suite de projecteurs tels que* $[p_n]$ *tende vers* 0*, alors* $\varphi(p_n) \to 0$.

Démonstration. **(i)⇒ (iii)** est immédiat, puisque $p_n \to 0$ (ultra)fortement !

(ii)⇒ (i) a été vu avec Pierre.

(iii)⇒(ii) résulte du lemme 9.17 : Si $\sum p_k = p$ alors $[\sum_{k=n}^{\infty} p_k] \to 0$. □

10.3 La trace

10.6 Théorème. *Il existe une unique trace* τ *positive sur* M *telle que* $\tau(1)$*. Elle est ultrafaiblement continue.*

Démonstration. Soit $\varphi \in M_*$ un état vectoriel. Pour tout $\mathbb{N}$, notons

$$E_n = \{p \in Proj(M);\ n[p] \leqslant 1\}$$

et posons $\alpha_n = \sup_{E_n} \varphi(p)$. Alors $\alpha_n \to 0$ d'après la prop. 9.19. Pour $U \in \mathcal{U}(M)$, posons $\varphi_U(x) = \varphi(UxU^*)$ et $K = \overline{co}(\{\varphi_U;\ U \in \mathcal{U}(M)\}$. Démontrons que K est une partie faiblement compacte de M_*. Il suffit de démontrer que son adhérence dans M^* pour la topologie de dualité avec M (qui est compacte car fermée dans la boule unité de M^*) est contenue dans M_*.

Soit $p \in E_n$. Alors pour tout $U \in \mathcal{U}(M)$, on a $[UpU^*] = [p]$, donc $\varphi(UxU^*) \leqslant \alpha_n$. Donc X est contenu dans l'ensemble $K_\alpha = \{\psi \in M_+^*,\ \psi(1) = 1,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in E_n;\ \psi(p) \leqslant \alpha_n\}$, lui-même contenu dans M_* d'après le théorème 10.5.

Alors, d'après le théorème de Ryll-Nardzewski, K possède un point fixe par $x \mapsto UxU^*$, qui est donc une trace $\tau \in M_*$.

L'unicité est facile : si τ est une trace, elle est imposée sur les projecteurs : elle est connue partout par linéarité et densité (normique) du sous-espace vectoriel de M engendré par $Proj(M)$. □

11 Sur le type des facteurs

11.1 Facteurs de type II_∞

Projecteurs finis, projecteurs infinis

11.1 Remarque. Soit M un facteur possédant une trace non nulle. Alors M est de type II_1.

En effet, si M possède un projecteur infini, pour tout projecteur p, on peut trouver un projecteur p_1 équivalent à p tel que $1 - p_1$ soit infini, donc équivalent à 1. Donc, pour toute trace, on trouve $\tau(p) = \tau(p_1) = \tau(1) - \tau(1 - p_1) = 0$. On en déduit que τ est nulle par densité de la sous algèbre engendré par les projecteurs.

11.2 Proposition. *Soient* M *un facteur et* p, q *deux projecteurs finis.*

a) Si p *et* q *sont orthogonaux, alors* $p + q$ *est fini.*

b) $p \vee q$ est fini

Démonstration. a) On peut supposer que $q \prec p$. Il existe u avec $u^*u = q$ et $uu^* \leqslant p$ équivalent à q. On définit alors une trace sur $(p+q)M(p+q)$ à l'aide de la trace de pMp en posant $\tau(x) = \tau(pxp) + \tau(uxu^*)$.

b) en résulte puisque $[p \vee q] \prec [p] + [q]$. □

Construction de facteurs de type II_∞. Soit H un espace hilbertien. Les endomorphisme continus de l'espace hilbertien $H \otimes \ell^2(\mathbb{N}) = \ell^2(\mathbb{N}; H)$ sont des matrices infinies $(a_{k,\ell})_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}$.

Soit $M \subset \mathcal{L}(H)$ un facteur de type II_1. On pose $N = \{T = (a_{k,\ell}) \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}; H));\ \forall (k,\ell) \in \mathbb{N}^2,\ a_{k,\ell} \in M\}$. Alors N est un facteur de type II_∞. Si p_0 est le projecteur qui à $\xi = (\xi_n) \in \ell^2(\mathbb{N}; H)$ associe $(\xi_0, 0, \ldots, 0, \ldots)$, alors $p_0 N p_0 \simeq M$.

Le facteur N ainsi construit se note $N = M \overline{\otimes} \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$.

Facteur de type II_1 associé à un facteur de type II_∞ Soit N un facteur de type II_∞.

Soit $p \in N$ un projecteur fini non nul. On construit une suite (p_n) de projecteurs orthogonaux finis deux à deux équivalents et comme $\sum p_n$ est infini, il est équivalent à 1.

Posons $K = p_0 H$. Choisissons u_n avec $u_n^* u_n = p_0$ et $u_n u_n^* = p_n$. Identifions H avec $\ell^2(\mathbb{N}; K)$.

Les éléments de $\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}; K))$ sont des matrices $(a_{k,\ell})_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}$ avec $(a_{k,\ell}) \in \mathcal{L}(K)$. Alors

$$T = (a_{k,\ell}) \in N \iff a_{k,\ell} \in M.$$

Donc $N \simeq M \overline{\otimes} \mathcal{L}(H) = \lim M_n(M)$ où l'on a posé $M = p_0 N p_0$.

Remarquons que $N' = \{T \otimes 1;\ T \in M'\}$.

Groupe fondamental. Se pose alors la question de l'unicité de M tel que $N = M \overline{\otimes} \mathcal{L}(H)$. On arrive tout de suite à la définition suivante.

11.3 Lemme. *Soient M un facteur de type II_1, τ sa trace et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) il existe deux projecteurs non nuls $p, q \in M$ tels que $\dfrac{\tau(p)}{\tau(q)} = \alpha$ et tel que les facteurs pMp et qMq soient isomorphes (par un $*-$isomorphisme ultrafaiblement continu).

b) pour tout couple (p, q) de projecteurs non nuls de M tels que $\dfrac{\tau(p)}{\tau(q)} = \alpha$, les facteurs pMp et qMq sont isomorphes (par un $*-$isomorphisme ultrafaiblement continu).

11.4 Définition. On appelle *groupe fondamental* de M l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant les conditions équivalentes du lemme. C'est un sous-groupe de $\mathbb{R}_+^*$.

Trace dans d'un facteur de type II_∞

11.5 Proposition. *Il existe une application (unique à multiplication par un scalaire près) $T : N_+ \to [0, +\infty]$ vérifiant :*

a) T est additive ;

b) $T(x^*x) = T(xx^*)$;

c) T est (ultra)faiblement semi-continue inférieurement ;

d) l'ensemble de $x \in M$ tels que $T(x^*x) \neq +\infty$ est dense.

Démonstration. Soit p un projecteur fini et τ la trace normalisée sur $M = pNp$. Donnons-nous $u_n^* u_n = p$ et $\sum u_n u_n^* = 1$. On pose $T(x) = \sum \tau(u_n^* x u_n)$ pour $x \geqslant 0$. Alors T est clairement faiblement semi-continu inférieurement et additive.

Indépendant des (u_n). Donnons-nous (u_n) et (v_k). Notons T_u et T_v les applications associées. Pour $x \in N$, on a

$$\begin{aligned} T_u(x^*x) &= \sum_n \tau(u_n^* x^* x u_n) = \sum_{k,n} \tau(u_n^* x^* v_k v_k^* x u_n) \\ &= \sum_{k,n} \tau(v_k^* x u_n u_n^* x^* v_k) = \sum_k \tau(v_k^* x x^* v_k) \\ &= T_v(xx^*). \quad \square \end{aligned}$$

On démontre, comme plus haut pour les facteurs de type II_1, que, inversement, si M admet une telle trace, c'est un facteur de type II_∞.

11.2 Représentations normales

Jusqu'ici, les algèbres de von Neumann (et en particulier, les facteurs) étaient plongées dans un $\mathcal{L}(H)$. On peut en fait considérer ce plongement comme une représentation de $\pi_0 : M \to \mathcal{L}(H_0)$.

Une représentation $\pi : M \to \mathcal{L}(H)$ est ultrafaiblement continue si que pour tout $\omega \in \mathcal{L}(H)$ la forme $\omega \circ \pi$ est dans le prédual M_* de M (c'est à dire $\omega \circ \pi$ est normale). On dit aussi que π est normale.

Toute somme, sous représentations de représentations normales est normale.

Si $\pi : M \to \mathcal{L}(H)$ est une représentation normale de M, alors $\pi(M)$ est ultrafaiblement fermée dans $\mathcal{L}(K)$: c'est une algèbre de von Neumann.

Pour simplifier, supposons que M est un facteur.

En regardant $\pi \oplus \pi_0$, on en déduit que π et π_0 correspondent en fait à des projecteurs du facteur $(\pi \oplus \pi_0)(M)'$. On en déduit

11.6 Proposition. *Toute représentation normale π de M dans un espace hilbertien séparable est une sous-représentation de $\pi_0 \otimes 1 : M \to \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}; H_0))$.*

(Cette proposition reste vraie pour une algèbre de von Neumann quelconque si on se restreint aux représentations dans un espace hilbertien séparable).

Il s'ensuit aussi :

11.7 Corollaire. *Le type (I, II, ou III) du commutant ne dépend pas de la représentation.*

11.3 Dimension des représentations dans le cas de type II_1

Pour comprendre toutes les représentations normales, il suffit donc d'en comprendre une seule.

Soit τ la trace de M, et $(H_\tau, \pi_\tau, \eta_\tau)$ la représentation GNS associée. Elle est normale. Soit $J : H_\tau \to H_\tau$ l'isométrie antilinéaire définie par $J(\eta_\tau(x)) = \eta_\tau(x^*)$. On démontre, comme dans le cas des groupes (voir par exemple Dixmier) :

11.8 Théorème. *On a $\pi_\tau(M)' = J\pi_\tau(M)J$.*

En particulier, $\pi_\tau(M)'$ est anti-isomorphe à M : c'est un facteur de type II_1.

La représentation π_τ s'appelle la représentation standard.

Si π est une autre représentation, il existe une représentation ρ et des projecteurs p et p_τ dans $\rho(M)'$ tels que π et π_τ soient unitairement équivalentes à $p\rho$ et $p_\tau\rho$ respectivement. Soit alors T une trace non nulle (finie ou infinie) sur $\rho(M)'$.

11.9 Définition. On appelle dimension de π le nombre $\dim(\pi) = \dfrac{T(p)}{T(p_\tau)}$.

11.4 Type du commutant

On déduit assez facilement de ce qui précède :

11.10 Proposition. *Le type (I, II, III) de M' est celui de M.*

- Le commutant d'un facteur de type I_k (avec $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \cup \{+\infty\}$) est un facteur de type I_ℓ (avec $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \cup \{+\infty\}$) - il dépend de la représentation.
- Le commutant d'un facteur de type II_1 ou II_∞ est un facteur de type II_1 ou II_∞ - il dépend de la représentation.
- Le commutant d'un facteur de type III est un facteur de type III - il ne dépend pas de la représentation. En effet, tous les projecteurs du commutant sont équivalents.

11.5 Type d'un produit croisé

(esquisse)

Soit (X, μ) un espace mesuré standard et Γ un groupe dénombrable agissant sur l'espace X en préservant la *classe de la mesure* μ de façon *libre* et *ergodique.*

On note $M = L^\infty(X, \mu) \rtimes \Gamma$ le produit croisé

a) Le facteur M est de type I si et seulement si la mesure μ est atomique. Il est de type I_k où k est le nombre d'élément de Γ et aussi le nombre d'atomes de μ...

b) Le facteur M est de type II_1 si et seulement si il existe dans la classe de μ une mesure de probabilité invariante (nécessairement unique).

c) Le facteur M est de type II_∞ si et seulement si il existe dans la classe de μ une mesure infinie invariante (nécessairement unique à un multiple scalaire près).

d) Sinon, M est de type III.

12 Moyennabilité et propriété T

On a associé à un groupe trois algèbres d'opérateurs $C^*(\Gamma)$, $C^*_r(\Gamma)$ et $L(\Gamma)$.

De nombreuses propriétés des groupes se reflètent du moins partiellement sur leurs algèbres d'opérateurs.

Nous allons voir ici deux notions fondamentales sur les groupes qui se reflètent de manière très importante sur leurs algèbres d'opérateurs.

12.1 Coefficients et contenance faible de représentations

12.1 Contenance faible de représentations. $\pi \prec \rho$ si $\ker\rho \subset \ker\pi$...

Toute une théorie... Sur laquelle je passe.

12.2 Fonctions de type positif. Formes positives sur $C^*(G)$ et fonctions de type positif.

Soit G un groupe dénombrable. On appelle coefficients d'une représentation π.

On a $\pi \prec \rho$ si $\overline{conv}(coeff(\pi)) \subset \overline{conv}(coeff(\rho))$.

12.3 Proposition. *Une représentation π contient faiblement la triviale si et seulement s'il existe $(\xi_n) \in H_\pi$ avec $\|\xi_n\| = 1$ et $\|\pi_g(\xi_n) - \xi_n\| \to 0$.*

12.2 Groupes moyennables

12.4 Proposition. *Pour un groupe dénombrable, équivalence entre :*

(i) Le morphisme $C^*(G) \to C^*_r(G)$ est un isomorphisme.

(ii) $\varepsilon \prec \lambda$.

(iii) Pour tout $f \in \ell^1(G)$ positive, on a $\|\lambda(f)\| = \|f\|_1$.

(iv) Il existe $(\xi_n) \in \ell^2(G)$ (positive) telle que $\|\xi_n\|_2 = 1$ et, pour tout $g \in G$, $\|\lambda_g(\xi_n) - \xi_n\|_2 \to 0$.

(v) Il existe $(\xi_n) \in \ell^1(G)$ (positive) telle que $\|\xi_n\|_1 = 1$ et, pour tout $g \in G$, $\|\lambda_g(\xi_n) - \xi_n\|_1 \to 0$.

(vi) Condition de Følner : il existe une suite F_n de parties de G telle que $\dfrac{|F_n \triangle gF_n|}{|F_n|} \to 0$ pour tout $g \in G$.

(vii) Il existe $M \in \ell^\infty(G)'$ positive et invariante à gauche, avec $M(1) = 1$.

Démonstration. On démontre (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv)⇒(i) ; puis (iv) $\iff$ (v), (v) $\iff$ (vi) et (v) $\iff$ (vii).

De (i) à (iv). (i)⇒(ii) est évident ; si f est positive $\varepsilon(f) = \displaystyle\int f = \|f\|_1$, d'où (ii)⇒(iii) ; soit F une partie finie de G symétrique et contenant l'élément neutre. Posons $f = \displaystyle\sum_{g\in F} \delta_g$. Si $|F| \in \mathrm{Sp} f$, alors il existe ξ presque invariant, donc (iii)⇒(iv).

Reste (iv)⇒(i). Soit σ une représentation (fidèle) de $C^*(\Gamma)$. Considérons $\mathcal{H} = \ell^2(G; H_\sigma)$. Considérons deux actions de G dans $\mathcal{H}$

- $(1 \otimes \lambda)$ définie par $((1 \otimes \lambda)_x(\xi))(g) = \xi(x^{-1}g)$;
- $(\sigma \otimes \lambda)$ définie par $((\sigma \otimes \lambda)_x(\xi))(g) = \sigma_x(\xi(x^{-1}g))$.

Notons aussi $V : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ l'unitaire défini par $(V\xi)(g) = \sigma_g(\xi(g))$. On a $V(1 \otimes \lambda)_x = (\sigma \otimes \lambda)_x V$. Donc la représentation $(\sigma \otimes \lambda)$ est une représentation de $C_r^*(G)$. Par ailleurs, soit $\xi \in H_\pi$; notons $\xi \otimes \xi_n$ la fonction $g \mapsto \xi_n(g)\xi$; pour tout $a \in C^*(G)$, on a

$$\langle (\xi \otimes \xi_n), (\sigma \otimes \lambda)(a)(\xi \otimes \xi_n)\rangle \to \langle \xi, \sigma(a)(\xi)\rangle.$$

En particulier, si $b \in \ker \lambda$, prenant $a = b^*b$, on trouve $\sigma(b)\xi = 0$.

(iv) $\Longleftrightarrow$ (v). Pour ξ, η des fonctions sur G, on a $\Big||\xi| - |\eta|\Big| \leqslant |\xi - \eta|$, donc on peut supposer ξ positif. On va utiliser la bijections $\xi \mapsto |\xi|^2$ de $\ell^2(G)_+$ dans $\ell^1(G)_+$. Soit $\xi \in \ell^2(G)$ une fonction positive ; posons $\eta = \lambda_g\xi$. On a $|\xi^2 - \eta^2| = |\xi - \eta|(\xi + \eta)$.
- On a $(\xi - \eta)^2 \leqslant |\xi - \eta|(\xi + \eta)$, donc $\|\xi - \eta\|_2^2 \leqslant \|\xi^2 - \eta^2\|_1$.
- On a $\|\xi^2 - \eta^2\|_1 = \langle |\xi - \eta|, \xi + \eta\rangle \leqslant (\|\xi\|_2 + \|\eta\|_2)\|\xi - \eta\|_2$.

(v) $\Longleftrightarrow$ (vi). Le sens non trivial : (v)$\Rightarrow$(vi). Soient S une partie finie de G, $\varepsilon > 0$ et $f \in L^1(G)$ telle que, pour $g \in S$ on ait $\|g.f - f\|_1 < \dfrac{\varepsilon}{|S|}\|f\|_1$. On peut remplacer f par $|f|$: $\|g.f - f\|_1$ diminue. On peu supposer f à support compact et à valeurs dans $\mathbb{Q}_+$. Quitte à multiplier par un nombre convenable, on peut supposer que f est à valeurs entières. Posons $F = \{(g,k) \in G\times\mathbb{N};\ k < f(g)\}$. On a $|F \triangle g.F| < \varepsilon|F|$. Posons $F_k = \{g \in G;\ (g,k) \in F\}$. On a $\displaystyle\sum_{g\in S}\sum_k |F_k \triangle g.F_k| < \varepsilon \sum_k |F_k|$. Donc il existe k tel que $\displaystyle|\sum_{g\in S} F_k \triangle g.F_k| < \varepsilon|F_k|$.

(v) $\Longleftrightarrow$ (vii). Pour (v)$\Rightarrow$(vii), on prend un ultrafiltre pour faire converger ξ_n vu comme forme linéaire sur $\ell^\infty(G)$ vers un M invariant.

Pour la réciproque, on prend une partie finie F de G et on considère l'image par l'application $f \mapsto (g.f - f)_{g\in F}$ de $S = \{f \in \ell^1(G);\ \|f\|_1 \leqslant 1;\ \displaystyle\sum_{g\in G} f(g) = 1\}$ dans $\ell^1(G)^F$. Alors 0 est faiblement adhérent à ce convexe par densité de $\ell^1(G)$ dans son bidual pour la topologie faible. Donc normiquement adhérent par Hahn Banach. □

12.5 Définition. Un groupe est dit *moyennable* s'il satisfait ces conditions équivalentes.

Plusieurs autres conditions équivalentes... Toute action affine sur un convexe compact non vide d'un espace localement convexe possède un point fixe ; tout action sur un espace compact non vide a une mesure de probabilité invariante... Voir [F. P. Greenleaf, Invariant means on topological groups and their applications, New York : Van Nostrand Reinhold, 1969.]

On a aussi une généralisation de la propriété (i) (qui se démontre de la même façon que (iv)$\Rightarrow$(i)) :

12.6 Proposition. *Pour tout groupe moyennable G et toute action α de G sur une C^*-algèbre A, le morphisme $A \times_\alpha G \to A \times_{r,\alpha} G$ est un isomorphisme.*

Exemples de groupes moyennables
- Un groupe fini.
- Le produit de deux groupes moyennables est moyennable. Une limite inductive de groupes moyennables est moyennable.
- $\mathbb{Z}$ est moyennable. Tout groupe abélien est moyennable.
- Tout sous-groupe, tout quotient de groupes moyennables est moyennable ; toute extension d'un groupe moyennable par un groupe moyennable est moyennable.
- En particulier, les groupes résolubles sont moyennables.
- Notion de croissance ; un groupe de croissance *sous exponentielle* est moyennable.

Exemples de groupes non moyennables

- Le groupe libre à deux générateurs n'est pas moyennable. Considérons l'opérateurs $T = a + a^* + b + b^*$ agissant dans $\ell^2(F_2)$. On peut écrire $\ell^2(F_2) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_n$ où H_n est le sous-espace vectoriel engendré par les mots de longueur n. L'opérateur T a une partie T^+ qui augmente la longueur et une partie T^- qui la diminue. On a $T^- = (T^+)^*$. On a $T^-T^+ = 3I + p_e$ où p_e est le projecteur (de rang 1) sur l'élément neutre de F_2. On pose $v = Tp_e$ et $S = T^+ - (1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2})v$. On a $S^*S = 3I$ de sorte que $\|S\| = \sqrt{3}$. Posons $v = Tp_e$. On a $\|v\| = 2$, et comme $v^2 = 0$, on a $\|v + v^*\| = 2$. Or $T = S + S^* + (1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2})(v + v^*)$, donc $\|T\| \leqslant 2\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} < 4$.
- Tout groupe contenant un groupe libre est non moyennable.
- Alternative de Tits : un sous groupe finiment engendré de $GL(n)$ est virtuellement résoluble *i.e.* a un sous-groupe résolubre d'indice fini, ou contient un groupe libre non trivial.
- Problème de von Neumann (résolu par la négative : A. Yu. Ol'shanskii [Uspekhi Mat. Nauk 35 (1980), no. 4(214), 199–200]). Est-ce qu'un groupe non moyennable contient nécessairement un sous groupe libre à deux générateurs ?

12.7 Théorème (Connes)**.** *Le facteur associé à tout groupe (ICC) moyennable est isomorphe au facteur hyperfini II_1 (de Murray-von Neumann).*

13 Modules hilbertiens

13.1 Définitions et exemples

Soient A une C^*-algèbre, E un espace vectoriel complexe. Une application sesquilinéaire (antilinéaire en la première variable, linéaire en la seconde) $\langle\ ,\ \rangle : E \times E \to A$ est dite *positive* si pour tout $x \in E$ on a $\langle x, x\rangle \geqslant 0$.

13.1 Lemme. *Soit $\langle\ ,\ \rangle : E \times E \to A$ une application sesquilinéaire positive :*

a) Pour tout $x, y \in E$, on a $\langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle^*$;

b) L'application $p : x \mapsto \|\langle x, x\rangle\|^{1/2}$ est une semi-norme sur E.

c) La forme sesquilinéaire $\langle\ ,\ \rangle$ se prolonge en une forme sesquilinéaire positive au séparé complété E_p de E pour la semi-norme p.

d) Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre involutive de A ; notons B son adhérence dans A. On suppose que E est muni d'une structure de $\mathcal{A}$-module à droite telle que pour tout $x, y \in E$ et tout $a \in \mathcal{A}$ on ait $\langle x, ya\rangle = \langle x, y\rangle a$ alors l'action de $\mathcal{A}$ se prolonge en une action B dans E_p et on a encore $\langle x, ya\rangle = \langle x, y\rangle b$ pour tout $x, y \in E_p$ et $b \in B$.

Démonstration. a) Les éléments $\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle = \langle x+y, x+y\rangle - \langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle$ et $i(\langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle) = \langle x, iy\rangle + \langle iy, x\rangle$ sont hermitiens, d'où a).

b) Soit X l'espace des formes linéaires positives sur A de norme $\leqslant 1$. D'après la prop. 6.18, on a $p(x) = \sup\{ f(\langle x, x\rangle)^{1/2},\ f \in X\}$. Or pour tout $f \in X$, la forme $(x, y) \mapsto f(\langle x, y\rangle)$ est un produit scalaire sur E donc $x \mapsto f(\langle x, x\rangle)^{1/2}$ est une semi-norme sur E d'où b).

c) Pour tout $f \in X$, $|f(\langle x, y\rangle)| \leqslant f(\langle x, x\rangle)^{1/2} f(\langle y, y\rangle)^{1/2} \leqslant p(x)p(y)$; donc, par la remarque p. 42, $\|\langle x, y\rangle\| \leqslant 2\sup\{ |f(\langle x, y\rangle)|,\ f \in X \} \leqslant 2p(x)p(y)$. En particulier, la forme sesquilinéaire $\langle\ ,\ \rangle$ est continue, d'où c).

d) Pour tout $x \in E$ et tout $a \in \mathcal{A}$ on a $\langle xa, xa\rangle = \langle xa, x\rangle a = (\langle x, xa\rangle)^* a = a^*\langle x, x\rangle a \leqslant p(x)^2 a^* a$ donc $p(xa) \leqslant p(x)\|a\|$. Il s'ensuit que, pour tout $a \in \mathcal{A}$, la multiplication à droite par a définit une application linéaire continue $\delta(a)$ de E_p dans lui même et $\|\delta(a)\| \leqslant \|a\|$ d'où d). □

13.2 Définition. Soit A une C^*-algèbre. Un A-*module préhilbertien* est un A-module à droite E muni d'une application sesquilinéaire positive $\langle\ ,\ \rangle : E \times E \to A$ appelée produit scalaire de E, telle que pour tout $x \in E$ l'application $y \mapsto \langle x, y\rangle$ est A-linéaire.

Soient A une C^*-algèbre et E un A-module préhilbertien. Par le lemme 13.1.b) l'application $x \mapsto \|\langle x, x\rangle\|^{1/2}$ est une semi-norme sur E. Pour $x \in E$ posons $\|x\| = \|\langle x, x\rangle\|^{1/2}$. Tout module préhilbertien sera muni de la semi-norme ci-dessus.

13.3 Proposition. *Soient A une C^*-algèbre et E un A-module préhilbertien.*

a) Pour tout $x, y \in E$, on a $\langle y, x\rangle\langle x, y\rangle \leqslant \|x\|^2\langle y, y\rangle$ (inégalité de Cauchy Schwarz)

b) Pour tout $x, y \in E$, on a $\|\langle x, y\rangle\| \leqslant \|x\|\|y\|$.

c) Pour tout $x \in E$, l'application $f_x : y \mapsto \langle x, y\rangle$ est une application linéaire continue de E dans A et on a $\|f_x\| = \|x\|$.

d) Pour tout $x \in E$ et tout $a \in A$ on a $\|xa\| \leqslant \|x\|\|a\|$.

Démonstration. a) Posons $a = \langle x, y\rangle$ et soit $t \in \mathbb{R}$. On a $\langle xa - ty, xa - ty\rangle = a^*\langle x, x\rangle a - 2ta^*a + t^2\langle y, y\rangle \in A_+$. Si $\langle x, x\rangle = 0$, on trouve, pour tout $t > 0$, $-2a^*a + t\langle y, y\rangle \in A_+$; comme A_+ est fermé, ceci reste vrai pour $t = 0$ donc $a = 0$. Si $\langle x, x\rangle \neq 0$, on pose $t = \|x\|^2$, comme $a^*\langle x, x\rangle a \leqslant ta^*a$, on trouve $t(-a^*a + t\langle y, y\rangle) \geqslant 0$.

b) résulte immédiatement de a).

c) Par b), f_x est continue et $\|f_x\| \leqslant \|x\|$. Or $\|f_x(x)\| = \|\langle x, x\rangle\| = \|x\|^2$ donc $\|f_x\| = \|x\|$.

d) Comme $\langle xa, xa\rangle = a^*\langle x, x\rangle a$, on a $\|xa\|^2 = \|a^*\langle x, x\rangle a\| \leqslant \|a\|^2\|x\|^2$. □

13.4 Définition. Soit A une C^*-algèbre. Un *A-module hilbertien* est un A-module préhilbertien séparé et complet.

Du lemme 13.1, on déduit immédiatement.

13.5 Proposition. *Le produit scalaire et l'opération à droite d'un A-module préhilbertien se prolongent par continuité au séparé complété et en font un A-module hilbertien.* □

13.6 Exemples. a) La C^*-algèbre A est un A-module hilbertien si on la munit du produit scalaire $\langle a, b\rangle = a^*b \ \ (a, b \in A)$. En effet, la norme d'un élément a dans le A-module hilbertien A est la même que la norme de a dans la C^*-algèbre A (puisque $\|a^*a\| = \|a\|^2$), donc le A-module préhilbertien A est séparé et complet.

b) Soit X un espace localement compact et E un fibré vectoriel complexe hermitien sur X. Notons $C_0(X; E)$ des sections continues nulles à l'infini de E. Pour $\xi, \eta \in C_0(X; E)$, $f \in C_0(X)$ et $x \in X$ on pose $(\xi f)(x) = \xi(x)f(x)$ et $\langle \xi, \eta\rangle(x) = \langle \xi(x), \eta(x)\rangle$. L'espace $C_0(X; E)$ muni de la structure de $C_0(X)$-module et du produit scalaire à valeurs dans $C_0(X)$ ainsi définis est un $C_0(X)$-module hilbertien.

c) Un sous-module fermé d'un A-module hilbertien est un A-module hilbertien. En particulier les idéaux à droite fermés de A sont des A-modules hilbertiens.

Soient E un A-module hilbertien et S une partie de E. Notons $S^\perp = \{\, x \in E\,,\ \forall y \in S\,,\ \langle x, y\rangle = 0\,\}$. Il est clair que $S^\perp$ est un sous-module fermé de E. Si F est un sous-module fermé de E, on n'a pas en général $F \oplus F^\perp = E$. En effet, soit X un espace compact, Y une partie fermé de X d'intérieur vide et posons $E = A = C(X)\,,\ F = \{\, f \in C(X)\,,\ f(t) = 0\,,\ \forall t \in Y\,\}$. Alors $F^\perp$ est l'ensemble des $f \in C(X)$ telles que $f(t) = 0$ si $t \in X - Y$ donc $F^\perp = \{0\}$.

d) Somme hilbertienne : Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille de A-modules hilbertiens. La somme hilbertienne $\mathcal{E} = \bigoplus_{i\in I} E_i$ des E_i est le sous-ensemble de l'espace produit de la famille (E_i) formé des éléments $(x_i)_{i\in I}$ tels que la somme $\sum_{i\in I}\langle x_i, x_i\rangle$ soit convergente dans A.

Supposons que l'ensemble I soit fini. Alors $\bigoplus_{i\in I} E_i$ est un A-module préhilbertien dont le produit scalaire est donné par la formule : $\langle (x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}\rangle = \sum_{i\in I}\langle x_i, y_i\rangle$. En particulier, si $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ sont des éléments de $\bigoplus_{i\in I} E_i$, on a l'inégalité $\|\sum_{i\in I}\langle x_i, y_i\rangle\| \leqslant \|\sum_{i\in I}\langle x_i, x_i\rangle\|^{1/2}\|\sum_{i\in I}\langle y_i, y_i\rangle\|^{1/2}$. Comme on a

$$\max_{i\in I}\|x_i\| \leqslant \sum_{i\in I}\langle x_i, x_i\rangle\|^{1/2} \leqslant (\operatorname{card} I)^{1/2}\max_{i\in I}\|x_i\|,$$

l'espace $\mathcal{E}$ est complet.

Revenons au cas général. Soient $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ des éléments de $\bigoplus_{i\in I} E_i$. Pour toute partie finie J de I on a $\|\sum_{i\in J}\langle x_i, y_i\rangle\| \leqslant \|\sum_{i\in J}\langle x_i, x_i\rangle\|^{1/2}\|\sum_{i\in J}\langle y_i, y_i\rangle\|^{1/2}$. On en déduit que la famille $\langle x_i, y_i\rangle$

est sommable et que $\bigoplus_{i\in I} E_i$ est un sous espace vectoriel de $\prod E_i$. Il est clair que c'est un sous-module de $\prod E_i$. On pose alors $\langle (x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}\rangle = \sum_{i\in I} \langle x_i, y_i\rangle$. Muni du produit scalaire ainsi défini, $\bigoplus_{i\in I} E_i$ est donc un module préhilbertien séparé.

Montrons qu'il est complet. Soit $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\bigoplus_{i\in I} E_i$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, ξ_n est une famille $(x_{n,i})_{i\in I}$. Pour tout $y = (y_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} E_i$ et tout $i \in I$, on a $\langle y_i, y_i\rangle \leqslant \langle y, y\rangle$ donc pour tout $i \in I$ la suite $(x_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy donc convergente dans E_i. Soit y_i sa limite. Soit $\varepsilon > 0$; la suite ξ_n étant de Cauchy, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, tels que $p \geqslant n$ et $q \geqslant n$, on ait $\| \sum_{i\in I} \langle x_{p,i} - x_{q,i}, x_{p,i} - x_{q,i}\rangle\|^{1/2} \leqslant \varepsilon/2$. La famille $(\langle x_{n,i}, x_{n,i}\rangle)_{i\in I}$ étant sommable, il existe un sous-ensemble fini J de I tel que $\| \sum_{i\in I-J} \langle x_{n,i}, x_{n,i}\rangle\|^{1/2} \leqslant \varepsilon/2$. Pour toute partie finie K de I disjointe de J et tout $p \geqslant n$, on a alors

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i\in K}\langle x_{p,i}, x_{p,i}\rangle\right\|^{1/2} &\leqslant \left\|\sum_{i\in K}\langle x_{p,i} - x_{n,i}, x_{p,i} - x_{n,i}\rangle\right\|^{1/2} + \left\|\sum_{i\in K}\langle x_{n,i}, x_{n,i}\rangle\right\|^{1/2}\\ &\leqslant \left\|\sum_{i\in I}\langle x_{p,i} - x_{n,i}, x_{p,i} - x_{n,i}\rangle\right\|^{1/2} + \left\|\sum_{i\in I-J}\langle x_{n,i}, x_{n,i}\rangle\right\|^{1/2} \leqslant \varepsilon\end{aligned}$$

Ceci ayant lieu pour tout $p \geqslant n$, $\| \sum_{i\in K} \langle y_i, y_i\rangle\|^{1/2} \leqslant \varepsilon$; il s'ensuit que la famille $(\langle y_i, y_i\rangle)_{i\in I}$ est sommable *i.e.* définit un élément ξ de $\bigoplus_{i\in I} E_i$.

Enfin, pour toute partie finie L de I, tout $p \geqslant n$ et tout $q \geqslant n$, on a $\| \sum_{i\in L} \langle x_{p,i} - x_{q,i}, x_{p,i} - x_{q,i}\rangle\|^{1/2} \leqslant \varepsilon/2$; fixant p et L et faisant tendre q vers l'infini, on en déduit que $\| \sum_{i\in L} \langle x_{p,i} - y_i, x_{p,i} - y_i\rangle\|^{1/2} \leqslant \varepsilon/2$; cette inégalité étant valable pour toute partie finie L de I, il s'ensuit que $\| \sum_{i\in I} \langle x_{p,i} - y_i, x_{p,i} - y_i\rangle\|^{1/2} \leqslant \varepsilon/2$ et la suite ξ_n converge vers ξ.

Par ailleurs, il est clair que la somme directe algébrique des modules E_i est dense dans $\bigoplus_{i\in I} E_i$, de sorte que $\bigoplus_{i\in I} E_i$ est le complété de la somme directe algébrique des modules E_i qui est un A-module préhilbertien séparé.

e) Soient I un ensemble et E un A-module hilbertien. Le A-module hilbertien $\bigoplus_{i\in I} E$ se note $\ell^2(I; E)$. En particulier, E^n est un A-module hilbertien. On note $\mathcal{H}_E$ le A-module hilbertien $\mathcal{H}_E = \ell^2(\mathbb{N}; E) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E$.

13.7 Proposition. *Soient A une C^*-algèbre et E un A-module hilbertien.*

a) Pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in E$ tel que $x = y\langle y, y\rangle$.

b) Soit B une C^*-algèbre contenant A comme idéal bilatère. Il existe sur E une unique structure de B-module à droite prolongeant l'opération de A. Autrement dit tout A-module hilbertien est un B-module hilbertien.

Démonstration. a) Posons $a = \langle x, x\rangle^{1/2}$ et $b_n = a^{1/3}(1/n + a)^{-1}$. Pour tout $b \in \tilde{A}$, on a $\|ab\| = \|xb\|$. La suite ab_n converge vers $a^{1/3}$ donc la suite xb_n est de Cauchy, donc converge. Soit y sa limite. On a $\langle y, y\rangle = a^{2/3}$, et comme $a(1 - b_n a^{2/3})$ tend vers 0, $x(1 - b_n a^{2/3})$ tend vers 0, donc $x = y\langle y, y\rangle$.

Soit $z \in E$ tel que $x = z\langle z, z\rangle$; on a $\langle z, z\rangle^3 = \langle x, x\rangle$ donc $\langle x, x\rangle^{1/3} = (\langle z, z\rangle^3)^{1/3} = \langle z, z\rangle =$ (prop. 3.13.a) donc $z - xb_n = z(1 + na)^{-1}$ donc $\|z - xb_n\|^2 = \|(1 + na)^{-2}a^{2/3}\|$ et $z = \lim (xb_n)$.

Par a), le A-module à droite E est non dégénéré, donc b) découle du cor. 5.9. □

13.2 Morphismes de A-modules hilbertiens

13.8 Définition. Soient A une C^*-algèbre, E et F des A-modules hilbertiens. Une application $T : E \to F$ est appelée un *morphisme* de E dans F s'il existe une application $S : F \to E$ telle que $\forall x \in E$, $\forall y \in F$, $\langle x, Sy\rangle = \langle Tx, y\rangle$. On note $\mathrm{Mor}(E, F)$ l'ensemble des morphismes de E dans F. On pose $\mathrm{Mor}(E) = \mathrm{Mor}(E, E)$.

13.9 Proposition. *Soient A une C^*-algèbre, E et F des A-modules hilbertiens et $T \in \mathrm{Mor}(E, F)$.*

a) Il existe une unique application S de F dans E satisfaisant à la propriété de la définition 13.8 ; cette application s'appelle l'adjoint de T et se note T^*. On a $T^* \in \mathrm{Mor}(F, E)$ et $(T^*)^* = T$.

b) L'application T est linéaire, A-linéaire, continue ; on a $\|T\| = \|T^*\|$ et $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

c) Soient H un autre A-module hilbertien et $S \in \mathrm{Mor}(F, H)$. Alors $ST \in \mathrm{Mor}(E, H)$ et $(ST)^* = T^*S^*$.

d) L'ensemble $\mathrm{Mor}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace des applications linéaires continues de E dans F.

e) L'algèbre de Banach involutive $\mathrm{Mor}(E)$ est une C^*-algèbre.

Démonstration. a) Soient R et S des applications de F dans E telles que pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$ on ait $\langle x, Ry\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle$. Alors, pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$ on a $\langle x, Sy - Ry\rangle = 0$. En prenant $x = Sy - Ry$, on trouve $\|Sy - Ry\| = 0$; donc, pour tout $y \in F$, $Sy = Ry$ et $S = R$. Les autres assertions sont claires.

b) Notons $G(T) = \{ (x, Tx) ,\ x \in E \}$ le graphe de T et posons $F = \{ (-T^*y, y) ,\ y \in F \}$. Montrons que $G(T) = F^\perp$. Pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$ on a $\langle (x, Tx), (-T^*y, y)\rangle = \langle Tx, y\rangle - \langle x, T^*y\rangle = 0$. Réciproquement, soit $(x, y) \in F^\perp$. Posons $z = Tx - y$. On a $(0, z) = (x, y) - (x, Tx) \in F^\perp$ donc $\langle z, z\rangle = \langle (0, z), (-T^*z, z)\rangle = 0$. Il s'ensuit que $z = 0$ *i.e.* $Tx = y$ et $(x, y) \in G(T)$.

Comme $G(T) = F^\perp$, c'est un sous-module et un sous-espace vectoriel fermé de $E \times F$. Donc T est linéaire, A-linéaire et continue (théorème du graphe fermé).

Enfin

$$\begin{aligned} \|T\|^2 &= \sup\{ \|\langle Tx, Tx\rangle\| ,\ x \in E ,\ \|x\| \leqslant 1 \} \\ &= \sup\{ \|\langle x, T^*Tx\rangle\| ,\ x \in E ,\ \|x\| \leqslant 1 \} \\ &\leqslant \|T^*T\| \leqslant \|T\|\|T^*\| . \end{aligned}$$

On en déduit que $\|T\| \leqslant \|T^*\|$ et, changeant T en T^* on voit que $\|T\| = \|T^*\|$ (par a) et finalement $\|T\|^2 \leqslant \|T^*T\| \leqslant \|T\|^2$.

c) est clair.

d) Si une application linéaire continue T de E dans F est limite d'une suite T_n d'éléments de $\mathrm{Mor}(E,F)$, alors la suite T_n^* est de Cauchy par a). Il est clair que la limite T^* de cette suite vérifie la condition de la définition 13.8.

e) Résulte de b), c) et d). □

Soient A une C^*-algèbre, E et F des A-modules hilbertiens et $T \in \mathrm{Mor}(E,F)$. L'élément $T^* \in \mathrm{Mor}(F,E)$ associé à T s'appelle *l'adjoint* de T.

Remarques. —

a) Soient A une C^*-algèbre et E et F des A-modules hilbertiens. Une application linéaire A-linéaire et continue de E dans F n'a pas toujours un adjoint. Notons $\mathrm{Hom}_A(E,A)$ et $\mathrm{Hom}_A(F,A)$ l'espace des applications A linéaires continues de E et F respectivement à valeurs dans A ; les applications $x \mapsto f_x$ (où $f_x(y) = \langle x, y\rangle$) sont des isométries antilinéaires $\Phi : E \to \mathrm{Hom}_A(E,A)$ et $\Psi : F \to \mathrm{Hom}_A(F,A)$. Une application linéaire A-linéaire et continue T de E dans F définit une application ${}^tT : \mathrm{Hom}_A(F,A) \to \mathrm{Hom}_A(E,A)$ en posant ${}^tT(f) = f \circ T$. Alors T admet un adjoint T^* si et seulement si ${}^tT(\Psi(F))$ est inclus dans $\Phi(E)$. Dans ce cas on a ${}^tT \circ \Psi = \Phi \circ T^*$.

b) Soient E et F des A-modules hilbertiens et $T \in \mathrm{Mor}(E,F)$. L'orthogonal de $\mathrm{im}\, T$ est $\ker T^*$; celui de $\mathrm{im}\, T^*$ est $\ker T$. Il n'est pas toujours vrai que l'orthogonal de $\ker T$ est l'adhérence de $\mathrm{im}\, T^*$.

13.3 Morphismes compacts

Soient A une C^*-algèbre, E et F des A-modules hilbertiens, $x \in E$ et $y \in F$. L'application $\theta_{y,x} : z \mapsto y\langle x, z\rangle$ est un élément de $\mathrm{Mor}(E,F)$ et son adjoint $(\theta_{y,x})^*$ est $\theta_{x,y}$.

13.10 Définition. Soient A une C^*-algèbre, E et F des A-modules hilbertiens. Pour tout $x \in E$ et $y \in F$, notons $\theta_{y,x}$ l'application $z \mapsto y\langle x, z\rangle$ de E dans F. On note $\mathcal{K}(E,F)$ l'adhérence dans $\mathrm{Mor}(E,F)$ de l'espace vectoriel engendré par les applications $\theta_{y,x}$. On pose $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E,E)$.

13.11 Proposition. *Soient A une C^*-algèbre, E et F des A-modules hilbertiens, $x \in E$ et $y \in F$.*

a) On a $\|\theta_{x,y}\| \leqslant \|x\|\|y\|$, $\|\theta_{x,x}\| = \|x\|^2$.

b) Soit H un A-module hilbertien. Si $T : F \to H$ est une application A-linéaire, on a $T\theta_{y,x} = \theta_{Ty,x}$. Si $S \in \mathrm{Mor}(H,E)$ on a $\theta_{y,x}S = \theta_{y,S^*x}$.

c) L'espace $\mathcal{K}(E)$ est un idéal bilatère fermé de $\mathrm{Mor}(E)$.

d) On a $\mathrm{Mor}(E) = \mathcal{M}(\mathcal{K}(E))$. Plus précisément, l'homomorphisme $\pi : \mathrm{Mor}(E) \to \mathcal{M}(\mathcal{K}(E))$ défini par la prop. 5.18.d) est un isomorphisme de C^*-algèbres.

Démonstration. On a $\|\langle x, \theta_{x,x}x\rangle\| = \|x\|^4$; a) et b) sont clairs et c) résulte immédiatement de b).

d) Soit $x \in E$; par la prop. 13.7.a), il existe $y \in E$ tel que $x = \theta_{y,y}y$. Donc, le $\mathcal{K}(E)$-module E est non dégénéré. Par le corollaire 5.9, E est un $\mathcal{M}(\mathcal{K}(E))$-module. Soient $x, y \in E$, $K \in \mathcal{K}(E)$ et $m \in \mathcal{M}(\mathcal{K}(E))$. Notons $T : E \to E$ l'application associée à m et $S : E \to E$ l'application associée à m^*. On a $\langle x, TKy\rangle = \langle (mK)^*x, y\rangle = \langle (K^*m^*)x, y\rangle = \langle K^*Sx, y\rangle = \langle Sx, Ky\rangle$. Comme $E = \{\, Ky\,,\ y \in E\,,\ K \in \mathcal{K}(E)\,\}$, il s'ensuit que $T \in \mathrm{Mor}(E)$ et $T^* = S$. L'opération de $\mathcal{M}(\mathcal{K}(E))$ dans E définit donc un homomorphisme de C^*-algèbres $\rho : \mathcal{M}(\mathcal{K}(E)) \to \mathrm{Mor}(E)$ qui prolonge l'identité de $\mathcal{K}(E)$. Par l'unicité dans la prop. 5.18.d), $\pi \circ \rho$ est l'identité de $\mathcal{M}(\mathcal{K}(E))$; par l'unicité dans le corollaire 5.9, $\rho \circ \pi$ est l'identité de $\mathrm{Mor}(E)$. □

13.12 Exemples. a) Soit E un A-module hilbertien et $x \in E$. L'application γ_x qui à $a \in A$ associe $xa \in E$ est un élément de $\mathcal{K}(A, E)$. En effet, écrivons $x = y\langle y, y\rangle$ (prop. 13.17.a), on a $\gamma_x = \theta_{y,\langle y,y\rangle}$. Remarquons que γ_x^* est l'application $z \mapsto \langle x, z\rangle$ de E dans A. En particulier, l'application $x \mapsto \gamma_x$ est une bijection isométrique (prop. prop13.3.d) - avec les notations de la prop. 13.13.d) $\gamma_x^* = f_x$) de E sur $\mathcal{K}(A, E)$.

Remarquons que si F est un A-module hilbertien et $y \in F$ on a $\theta_{y,x} = \gamma_y\gamma_x^*$.

b) Considérons le A-module hilbertien A (exemple 13.6.a). Pour $a \in A$, notons γ_a l'application $b \mapsto ab$ de A dans elle même. Par a), l'application $a \mapsto \gamma_a$ est une bijection isométrique de A sur $\mathcal{K}(A)$. Par ailleurs, il est clair que l'application $a \mapsto \gamma_a$ est un homomorphisme de C^*-algèbres de A dans $\mathrm{Mor}(A)$. C'est donc un isomorphisme de A sur $\mathcal{K}(A)$. On identifiera $\mathcal{K}(A)$ à A au moyen de cet isomorphisme. Si E est un A-module hilbertien et $x, y \in E$, on a $\gamma_x^*\gamma_y = \langle x, y\rangle$ (via l'identification de $\mathcal{K}(A)$ avec A).

c) Soient E et F des A-modules hilbertiens et $m, n \in \mathbb{N}$. L'espace $\mathrm{Mor}(E^n, F^m)$ s'identifie à l'espace $M_{m,n}(\mathrm{Mor}(E, F))$ des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathrm{Mor}(E, F)$: à $T \in \mathrm{Mor}(E^n, F^m)$ correspond la matrice $T_{i,j}$ où $T(x_1, \dots, x_n) = (\sum_j T_{1,j}x_j\,, \dots, \sum_j T_{m,j}x_j)$; à T^* correspond la matrice $(T^*)_{i,j} \in M_{n,m}(\mathrm{Mor}(F, E))$ telle que $(T^*)_{i,j} = (T_{j,i})^*$.

Cette correspondance identifie $\mathcal{K}(E^n, F^m)$ à $M_{m,n}(\mathcal{K}(E, F))$. En particulier $\mathcal{K}(A^n, A^m) = M_{m,n}(A)$ et $\mathcal{K}(A^n)$ est l'algèbre $M_n(A)$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans A. En particulier l'algèbre involutive $M_n(A)$ admet une structure, nécessairement unique, de C^*-algèbre.

Plus généralement, si $E_1, \dots, E_n$ et $F_1, \dots F_m$ sont des A-modules hilbertiens, on peut identifier $\mathrm{Mor}\left(\bigoplus_{k=1}^n E_k, \bigoplus_{\ell=1}^m F_\ell\right)$ à un espace de matrices $(T_{\ell,k})$ de type $m \times n$ où $T_{\ell,k} \in \mathrm{Mor}(E_k, F_\ell)$.

La matrice $(T_{\ell,k})$ définit un élément de $\mathcal{K}\left(\bigoplus_{k=1}^n E_k, \bigoplus_{\ell=1}^m F_\ell\right)$ si et seulement si, pour tout $(\ell, k)\,,\ T_{\ell,k} \in \mathcal{K}(E_k, F_\ell)$.

En particulier, si E et F sont deux A-modules hilbertiens, on identifie $\mathcal{K}(E, F)$ à la partie $\{T \in \mathcal{K}(E \oplus F),\ TF = 0\,,\ T^*E = 0\}$ de la C^*-algèbre $\mathcal{K}(E \oplus F)$. Enfin, $E = \mathcal{K}(A, E)$ s'identifie à une partie de la C^*-algèbre $\mathcal{K}(A \oplus E)$.

d) Pour $n \in \mathbb{N}$ notons $P_n \in \mathrm{Mor}(\mathcal{H}_A)$ le morphisme tel que $P_n((a_k)_{k\in\mathbb{N}}) = ((b_k)_{k\in\mathbb{N}})$ où $b_k = a_k$ si $k < n$ et $b_k = 0$ si $k \geqslant n$. On a $P_n = P_n^* = P_n^2$ et pour tout $x \in \mathcal{H}_A$ la suite P_nx converge vers x. Il s'ensuit que pour tout A-module hilbertien E, tout $x \in E$ et tout $y \in \mathcal{H}_A$, on a $\theta_{x,y} = \lim \theta_{x,y}P_n$. Comme $\|P_n\| \leqslant 1$, pour tout $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_A, E)$ on a $T = \lim TP_n$. En particulier, il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que, pour tout $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}_A$ la série $\sum_n x_na_n$ converge vers Ta. De plus, pour tout $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_A)$ on a $T = \lim P_nTP_n$; or $P_n\mathcal{K}(\mathcal{H}_A)P_n$ est isomorphe à $\mathcal{K}(A^n) = M_n(A)$. Donc $\mathcal{K}(\mathcal{H}_A)$ est la limite inductive au sens des C^*-algèbres (*cf.* exerc. **??**) de $M_n(A)$.

e) Soient E et F des A-modules hilbertiens. Pour $S \in \mathcal{K}(E)$ et $T \in \mathcal{K}(E, F)\,,\ TS \in \mathcal{K}(E, F)$; en particulier, $\mathcal{K}(E, F)$ est un $\mathcal{K}(E)$-module à droite. Pour $S, T \in \mathcal{K}(E, F)$ on pose $\langle S, T\rangle = S^*T \in \mathcal{K}(E)$; Muni de ce produit scalaire, $\mathcal{K}(E, F)$ est un $\mathcal{K}(E)$-module hilbertien (corollaire 13.14). En particulier, l'ensemble des n-uplets (matrices-ligne) $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ s'identifie au $M_n(A)$-module hilbertien $\mathcal{K}(A^n, E)$.

13.4 Morphismes positifs

Il est facile de caractériser les éléments hermitiens et les éléments positifs de la C^*-algèbre $\mathrm{Mor}(E)$:

13.13 Proposition. *Soient A une C^*-algèbre et E un A-module hilbertien.*

a) Soit $S, T : E \to E$ des applications linéaires telles que, pour tout $x \in E$ on ait $\langle x, Tx\rangle = \langle x, Sx\rangle^*$. Alors $T \in \mathrm{Mor}(E)$ et $T^* = S$.

b) Soit $T : E \to E$ une application linéaire telle que, pour tout $x \in E$ on ait $\langle x, Tx\rangle = \langle x, Tx\rangle^*$. Alors $T \in \mathrm{Mor}(E)$ et $T^* = T$.

c) Si $T \in \mathrm{Mor}(E)_+$ alors pour tout $x \in E$ on a $\langle x, Tx\rangle \in A_+$ et $\|T\| = \sup\{ \|\langle x, Tx\rangle\| , \ x \in E , \ \|x\| \leqslant 1 \}$.

d) Réciproquement, soit $T : E \to E$ une application linéaire telle que, pour tout $x \in E$ on ait $\langle x, Tx\rangle \in A_+$. Alors $T \in \mathrm{Mor}(E)_+$.

Démonstration. a) Pour $(x, y) \in E^2$ posons $Q(x, y) = \langle x, Ty\rangle - \langle y, Sx\rangle^*$; l'application Q est sesquilinéaire, pour $z \in E$, on a $Q(z, z) = 0$ donc, par polarisation $Q = 0$.

b) résulte immédiatement de).

c) Si $T = S^*S$ alors $\langle x, Tx\rangle = \langle Sx, Sx\rangle \in A_+$ et $\|T\| = \|S\|^2 = sup\{ \|\langle Sx, Sx\rangle\| , \ x \in E , \ \|x\| \leqslant 1 \}$.

d) Par), $T \in \mathrm{Mor}(E)$ et $T^* = T$. Posons $T^- = f(T)$ où $f : t \mapsto \sup(0, -t)$ et $S = T^-TT^-$. Alors $-S \in \mathrm{Mor}(E)_+$ et par), pour tout $x \in E$, on a $\langle x, Sx\rangle \leqslant 0$. Or, en posant $y = T^-x$ on trouve $\langle x, Sx\rangle = \langle y, Ty\rangle \geqslant 0$. Donc $\langle x, Sx\rangle = 0$. Donc $\| - S\| = 0$ par) et $S = 0$ *i.e.* $(T^-)^3$, d'où $T^- = 0$ et $T \in \mathrm{Mor}(E)_+$. □

13.14 Corollaire. *Soient E et F des A-modules hilbertiens et $T \in \mathrm{Mor}(E, F)$. Alors $T^*T \in \mathrm{Mor}(E)_+$.*

Démonstration. Résulte de la prop. 13.13.d). □

Soient E et F des A-modules hilbertiens. Pour $T \in \mathrm{Mor}(E, F)$, le morphisme $(T^*T)^{1/2} \in \mathrm{Mor}(E)$ est appelé *module* de T et noté $|T|$.

13.15 Remarque. (*cf.* lemme 3.29). Soient E et F des A-modules hilbertiens et $T \in \mathrm{Mor}(E, F)$. Pour toute fonction f polynomiale on a $Tf(T^*T) = f(TT^*)T$ et par le théorème de Weierstrass, cela reste vrai si f est une fonction continue sur $\mathrm{Sp}\, T^*T \cup \mathrm{Sp}\, TT^*$ $(\subset \mathrm{Sp}\, T^*T \cup \{0\})$.

13.16 Lemme. *Soient E , F et H des A-modules hilbertiens.*

a) Soient $x \in E$ et $y \in F$. Alors $\langle x, x\rangle \leqslant \langle y, y\rangle$ si et seulement si pour tout $a \in A$, $\|xa\| \leqslant \|ya\|$.

b) Soient $S \in \mathrm{Mor}(E, H)$ et $T \in \mathrm{Mor}(F, H)$. Alors $SS^* \leqslant TT^*$ si et seulement si pour tout $z \in H$, $\|S^*z\| \leqslant \|T^*z\|$.

Démonstration. a) Posons $b = \langle x, x\rangle^{1/2}$ et $c = \langle y, y\rangle^{1/2}$. Pour tout $a \in A$, on a $\|ba\| = \|xa\|$ et $\|ca\| = \|ya\|$. a) résulte alors de la prop. 3.30.

b) Par la prop. 13.13.d), on a $SS^* \leqslant TT^*$ si et seulement si pour tout $z \in F$, $\langle S^*z, S^*z\rangle \leqslant \langle T^*z, T^*z\rangle$ et par a), ceci a lieu si et seulement si pour tout $z \in H$ et tout $a \in A$, $\|S^*za\| \leqslant \|T^*za\|$. □

13.5 Restriction des morphismes à des sous-modules ; sous-modules orthocomplémentés

13.17 Proposition. *Soient A une C^*-algèbre, E et F des A-modules hilbertiens et $T \in \mathrm{Mor}(E,F)$.*

a) Si T est surjective alors TT^* est inversible dans $\mathrm{Mor}(F)$ et $E = \ker T \oplus \mathrm{im}\, T^*$.

b) Si T est bijective, il en va de même pour T^*. De plus, $T^{-1} \in \mathrm{Mor}(F,E)$ et $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

Démonstration. a) Supposons T surjective. Par le théorème de l'application ouverte, il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$, tel que $Tx = y$ et $\|x\| \leqslant k\|y\|$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\|T^*y\|\|x\| \geqslant \|\langle T^*y, x\rangle\| = \|\langle y, Tx\rangle\| = \|y\|^2$ et $k\|T^*y\| \geqslant \|y\|$. Par le lemme 13.16.b), on a $k^2TT^* \geqslant 1$ donc TT^* est inversible. Posons $p = T^*(TT^*)^{-1}T$. Comme $(TT^*)^{-1}T$ est surjectif $\mathrm{im}\, p = \mathrm{im}\, T^*$. Comme $T^*(TT^*)^{-1}$ est injectif $\ker p = \ker T$. Or $p = p^2$, donc $E = \ker p \oplus \mathrm{im}\, p$.

b) Si T est bijectif, alors par a) TT^* est bijectif donc T^* l'est aussi. Soient $y \in F$ et $x \in E$. Posons $x_1 = T^{-1}y$ et $y_1 = (T^*)^{-1}x$. On a $\langle T^{-1}y, x\rangle = \langle x_1, T^*y_1\rangle = \langle Tx_1, y_1\rangle = \langle y, (T^*)^{-1}x\rangle$. Donc $T^{-1} \in \mathrm{Mor}(F,E)$ et $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$. □

13.18 Définition. Soient A une C^*-algèbre et E un A-module hilbertien. Un sous-module fermé F de E est dit *orthocomplémenté* si $E = F \oplus F^\perp$.

Si le sous-module F de E est orthocomplémenté, alors $F = (F^\perp)^\perp$. La réciproque n'est pas vraie (*cf.* exerc. p. **??**). Tout sous-module orthocomplémenté est facteur direct topologique. Un sous-module facteur direct topologique n'est pas toujours orthocomplémenté (*cf.* exerc. **??**).

13.19 Corollaire. *Soient A une C^*-algèbre, E et F des A-modules hilbertiens.*

a) Un sous-module fermé H de E est orthocomplémenté si et seulement si l'inclusion de H dans E est un élément de $\mathrm{Mor}(H,E)$.

b) Pour toute application A-linéaire $T : E \to F$ les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $T \in \mathrm{Mor}(E,F)$.

(ii) Le graphe de T est un sous module orthocomplémenté de $E \oplus F$.

Démonstration. a) Notons u l'inclusion de H dans E. Si H est orthocomplémenté, la projection orthogonale de E sur H est clairement l'adjoint de u. Réciproquement, supposons que $u \in \mathrm{Mor}(H,E)$; alors pour tout $x, y \in H$, $\langle ux, y\rangle = \langle x, y\rangle$ donc $u^*y = y$ donc u^* est surjectif, donc $\mathrm{im}\, u$ est orthocomplémenté par la prop. 13.17.a).

b) Notons G le graphe de T. Si $T \in \mathrm{Mor}(E,F)$, l'application (id, T) définit un élément S de $\mathrm{Mor}(E, E \oplus F)$ et on a $S^*(x,y) = x + T^*y$. Comme S^* est surjective, $G = \mathrm{im}\, S$ est orthocomplémenté par la prop. 13.17.a). Réciproquement, si G est orthocomplémenté, notons $u \in \mathrm{Mor}(G, E \oplus F)$ l'inclusion, $p \in \mathrm{Mor}(E \oplus F, E)$ et $q \in \mathrm{Mor}(E \oplus F, F)$ les projections. Alors pu est bijective et $T = qu(pu)^{-1} \in \mathrm{Mor}(E,F)$ (prop. 13.17.b). □

13.20 Lemme. *Soient A une C^*-algèbre, E et F des A-modules hilbertiens et $T \in \mathrm{Mor}(E,F)$.*

a) Les adhérences dans E de T^*F, de $|T|E$ et de T^*TE coïncident.

b) Soient E_1 un sous-module fermé de E et F_1 un sous-module fermé de F tels que TE_1 soit inclus dans F_1 et que T^*F_1 soit inclus dans E_1. Alors la restriction de T est un élément $T_1 \in \mathrm{Mor}(E_1, F_1)$.

Démonstration. a) On a $T^*TE \subset T^*F$. Or $T^* = \lim T^*T(1/n + T^*T)^{-1}T^*$, donc T^*F est inclus dans l'adhérence de T^*TE et les adhérences dans E de T^*F et de T^*TE coïncident. Remplaçant T par $|T|$, on en déduit que les adhérences de $|T|E$ et de T^*TE coïncident.

b) est clair : l'adjoint de T_1 est la restriction de T^*. □

13.21 Proposition. *Soient A une C^*-algèbre, E et F des A-modules hilbertiens et $T \in \mathrm{Mor}(E, F)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) TE est fermé dans F.

(ii) T^*F est fermé dans E.

(iii) 0 est isolé dans le spectre de T^*T.

(iv) 0 est isolé dans le spectre de TT^*.

Si ces conditions sont satisfaites, alors les sous-modules TE de F et T^*F de E sont orthocomplémentés.

Démonstration. Montrons que (i) $\Rightarrow$ (iii). Si TE est fermé, T définit par restriction un élément $S \in \mathrm{Mor}(E, TE)$ (lem. 13.20.b). Alors SS^* est inversible (prop. 13.17.a) donc 0 est isolé dans le spectre de $T^*T = S^*S$.

Si 0 est isolé dans le spectre de TT^*, soient $f : Sp(TT^*) \to \mathbb{R}$ et $g : Sp(TT^*) \to \mathbb{R}$ les fonctions continues telles que $f(0) = g(0) = 0$ et $f(t) = 1\,,\; g(t) = 1/t$ pour $t \neq 0$. On a $f(TT^*)TT^* = TT^*$ et $TT^*g(TT^*) = f(TT^*)$ donc TT^* et $f(TT^*)$ ont même image. Comme $f(TT^*)$ est un idempotent hermitien, son noyau et son image sont orthogonaux et $\mathrm{im}\, TT^*$ est orthocomplémenté. Comme TE contient TT^*F et que ces modules ont même adhérence, (lemme 13.20.b) $TE = TT^*F$ est fermé. Donc (iv) $\Rightarrow$ (i).

Par la prop. 2.8 (iii) $\iff$ (iv). On a donc (i) $\iff$ (iii) $\iff$ (iv). Changeant T en T^*, on trouve (ii) $\iff$ (iii) $\iff$ (iv).

On a vu que si (iv) est satisfaite TE est orthocomplémenté, donc si (iii) est satisfaite, T^*F l'est aussi. □

13.6 Topologies sur $\mathrm{Mor}(E, F)$

Soient A une C^*-algèbre et E et F des A-modules hilbertiens. En dehors de la topologie normique, on est amené à considérer sur $\mathrm{Mor}(E, F)$ les topologies suivantes :

a) La topologie de la convergence simple normique, appelée parfois *topologie forte* :
C'est la topologie la moins fine pour laquelle les applications $T \mapsto Tx$ sont continues, pour tout $x \in E$.

b) La *topologie $*$-forte :*
C'est la topologie la moins fine pour laquelle les applications $T \mapsto Tx$ et $T \mapsto T^*y$ sont continues, pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$.

c) La *topologie faible :*
C'est la topologie la moins fine pour laquelle les applications $T \mapsto \langle y, Tx\rangle$ sont continues, pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$.

Exemple. — Soient A une C^*-algèbre, E et F des A-modules hilbertiens. Soit μ une mesure finie sur un espace localement compact X et $x \mapsto T_x$ une application bornée $*$-fortement continue de X dans $\mathrm{Mor}(E, F)$; l'élément $\displaystyle\int T_x d\mu(x)$ de $\mathrm{Mor}(E, F)$ est défini par les formules $(\displaystyle\int T_x d\mu(x))\xi = \int T_x \xi d\mu(x)$

et $(\int T_x d\mu(x))^*\eta = \int T_x^*\eta d\mu(x)$ pour tout $\xi \in E\,,\ \eta \in F$. Remarquons que $\int T_x d\mu(x)$ appartient à l'adhérence $*$-forte du sous-espace de $\mathrm{Mor}(E,F)$ engendré par $\{\,T_x\,,\ x \in X\,\}$.

13.7 Isométries partielles

Soient A une C^*-algèbre, E et F des A-modules hilbertiens et $u \in \mathrm{Mor}(E,F)$. Comme dans le cas des espaces hilbertiens, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $u = uu^*u$; (ii) $u^* = u^*uu^*$; (iii) $u^*u = (u^*u)^2$; (iv) $uu^* = (uu^*)^2$.

En effet, (i) et (ii) se déduisent l'un de l'autre par passage aux adjoints.
(i) $\Rightarrow$ (iii) est clair. Si (iii) est satisfait $T = u(1-u^*u)$ vérifie $u^*T = 0$ donc $T^*T = 0$ et $T = 0$, d'où (i). Enfin, remplaçant u par u^* dans (i) $\iff$ (iii), on en déduit que (ii) $\iff$ (iv).

Un morphisme qui vérifie les conditions équivalentes ci-dessus est encore appelé une *isométrie partielle.*

Soit $u \in \mathrm{Mor}(E,F)$ une isométrie partielle.

- De la condition (ii) (*resp.* (i)) il résulte que les morphismes u^* et u^*u (*resp.* u et uu^*) ont même image et de la condition (iii) (*resp.* (iv)) on déduit que celle-ci est un sous-module orthocomplémenté de E (*resp.* F).
- On appelle support initial (*resp.* final) de l'isométrie partielle $u \in \mathrm{Mor}(E,F)$ le sous-module $\mathrm{im}\,u^*$ de E (*resp.* $\mathrm{im}\,u \subset F$). Si $\mathrm{im}\,u = F$ et $\mathrm{im}\,u^* = E$ alors u est unitaire.
- On pose aussi $\Gamma_u = \{(x,y) \in E \times F;\ ux = y \text{ et } u^*y = x\}$.

13.22 Remarque. Soient A une C^*-algèbre, E et F des A-modules hilbertiens et $u, v \in \mathrm{Mor}(E,F)$ des isométries partielles. Les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) $uu^* = vu^*$; (ii) $u^*u = u^*v$; (iii) $u = vu^*u$; (iv) $u = uu^*v$. (v) Les restrictions de v et de u au support initial de u coïncident ; (vi) $\Gamma_u \subset \Gamma_v$.

En effet, on passe de (i) à (iii) en multipliant à droite par u et de (iii) à (i) en multipliant à droite par u^*, d'où (i) $\iff$ (iv). De même, en multipliant à gauche par u et u^*, on voit que (ii) $\iff$ (iv).

Si l'assertion (i) est satisfaite, on a $(v-u)u^* = 0$ donc $vv^* = uu^* + (v-u)(v-u)^*$. Il en résulte que $u^*(v-u)(v-u)^*u = u^*(vv^* - uu^*)u = u^*(vv^*-1)u$. Or $(1-vv^*)^2 = 1-vv^*$ donc $u^*(v-u)(v-u)^*u \leqslant 0$ d'où l'on déduit que $u^*(v-u) = 0$ c'est à dire l'assertion (ii).

Si u et v satisfont (ii), u^* et v^* satisfont (i), donc (ii) par ce qui précède, donc u et v satisfont (i). (i) s'écrit $(u-v)u^* = 0$ et est donc équivalent à (v).

Si ces conditions sont satisfaites, on dit que v prolonge u et on écrit $u \prec v$. La relation $\prec$ est une relation d'ordre sur l'ensemble des isométries partielles de E dans F.

Si $u \prec v$, alors $(v-u)^*u$ et $u(v-u)^*$ sont nuls d'où il ressort que $(v-u)(v-u)^*(v-u) = vv^*v - vu^*v = v-u$; donc $v-u$ est une isométrie partielle et il est clair que ses supports initial et final sont orthogonaux à ceux de u. Réciproquement, si v est une isométrie partielle de supports initial et final orthogonaux à ceux de u, alors $u+w$ est une isométrie partielle et $u \prec u+w$. En d'autres termes, l'application qui à v associe $v-u$ est une bijection de l'ensemble des isométries partielles v prolongeant u dans l'ensemble des isométries partielles $w \in \mathrm{Mor}(E,F)$ de domaine initial et final respectivement inclus dans $\ker u$ et dans $\ker u^*$.

13.8 Décomposition polaire dans les modules hilbertiens

13.23 Proposition. *Soient A une C^*-algèbre, E et F des A-modules hilbertiens et $T \in \mathrm{Mor}(E,F)$. Notons E_1 et F_1 les adhérences respectives de T^*F dans E et de TE dans F et $T_1 \in \mathrm{Mor}(E_1,F_1)$ la* *restriction de T. Il existe un unique $v \in \mathrm{Mor}(E_1, F_1)$ tel que pour tout $x \in E$ on ait $Tx = v|T|x$. Le morphisme v ainsi défini est unitaire.*

Démonstration. Remplaçant T par sa restriction, on se ramène (grâce au lemme 13.20) au cas où $E_1 = E$ et $F_1 = F$. Pour $n \in \mathbb{N}$ posons $u_n = T(1/n + T^*T)^{-1/2} = (1/n + TT^*)^{-1/2}T$ (remarque 13.15). Soit $x \in E$; si $x = T^*y$, alors $u_n x = (1/n + TT^*)^{-1/2}TT^*y$ converge vers $|T^*|y$. Comme $\|u_n\| \leqslant 1$, il s'ensuit que pour tout $x \in E$ la suite $u_n x$ converge dans F. Il en résulte (en remplaçant T par T^*) que pour tout $y \in F$ la suite $u_n^* y$ converge dans E. Soit $v \in \mathrm{Mor}(E, F)$ tel que pour tout $x \in E$ on ait $vx = \lim u_n x$. La suite $u_n|T|$ converge en norme vers T, donc $v|T| = T$. Toute application linéaire continue est déterminée par sa restriction à $|T|E$ qui est dense dans $E_1 = E$ d'où l'unicité de v. Enfin, $u_n^* u_n x$ converge vers x si $x \in T^*TE$. Il s'ensuit que $v^*v = 1_E$. On calcule vv^* de façon analogue. $\square$

13.24 Corollaire. *Soient A une C^*-algèbre, E et F des A-modules hilbertiens et $T \in \mathrm{Mor}(E, F)$. Si les adhérences de $\mathrm{im}\, T$ et de $\mathrm{im}\, T^*$ sont des sous-modules orthocomplémentés de F et E respectivement, il existe un unique $u \in \mathrm{Mor}(E, F)$ tel que $T = u|T|$ et dont la restriction à $\ker T$ soit nulle. Alors u est une isométrie partielle de support initial l'adhérence de $\mathrm{im}\, T^*$ de support final l'adhérence de $\mathrm{im}\, T$. On a $|T| = u^*T = T^*u$, $|T^*| = Tu^* = uT^*$ et $T^* = |T|u^* = u^*Tu^* = u^*|T^*|$.*

Démonstration. Comme $\mathrm{im}\,|T|$ et $\mathrm{im}\, T^*$ ont même adhérence et que celle-ci est un sous-module supplémentaire de son orthogonal $\ker T$, toute application linéaire continue est déterminée par ses restrictions à $|T|E$ et à $\ker T$ d'où l'unicité de u. Pour construire un u qui convienne, il suffit de poser $ux = vx$ si $x \in \mathrm{im}\, T^*$ et $ux = 0$ si $x \in (\mathrm{im}\, T^*)^\perp$. On a alors $u^*x = v^*x$ si $x \in \mathrm{im}\, T$ et $u^*x = 0$ si $x \in (\mathrm{im}\, T)^\perp$. Les calculs de u^*u et uu^* sont clairs. On a $|T| = u^*u|T| = u^*T = T^*u$, puisque $|T|$ est autoadjoint. Comme $u|T| = T$, $T^* = |T|u^* = u^*Tu^*$. De plus, $Tu^* = u|T|u^* \in \mathrm{Mor}(E)_+$ et $Tu^*Tu^* = TT^*$ donc $Tu^* = (TT^*)^{1/2} = |T^*| = |T^*|^* = uT^*$. $\square$

13.25 Remarque. Sous les hypothèses du corollaire, posons $u_n = T(1/n + T^*T)^{-1/2}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors u est limite de u_n pour la topologie $*$-forte.

13.26 Définition. Si $T \in \mathrm{Mor}(E, F)$ satisfait les hypothèses du corollaire, l'isométrie partielle u et la décomposition $T = u|T|$ s'appellent respectivement la *phase* et la *décomposition polaire* de T.

Par le corollaire 13.24, si $T = u|T|$ est la décomposition polaire de T, celle de T^* est $T^* = u^*|T^*|$.

On appelle *projecteur* d'une C^*-algèbre B un élément $p \in B$ tel que $p^2 = p = p^*$. Nous utiliserons plus loin le résultat suivant.

13.27 Proposition. *Soient E un A-module hilbertien, p et q deux projecteurs dans $\mathrm{Mor}(E)$.*

a) Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $pE + (1-q)E$ et $(1-p)E + qE$ sont denses dans E.

(ii) pqE est dense dans pE et $(1-p)(1-q)E$ est dense dans $(1-p)E$.

(iii) qpE est dense dans qE et $(1-q)(1-p)E$ est dense dans $(1-q)E$.

(iv) L'image de $p+q-1$ est dense dans E.

b) Si ces conditions sont satisfaites, il existe un unique morphisme unitaire $w \in \mathrm{Mor}(E)$ tel que $wpE = qE$, $pwp \in \mathrm{Mor}(E)_+$ et $-(1-p)w(1-p) \in \mathrm{Mor}(E)_+$. On a $w^2 = 1$, $w(1-p)E = (1-q)E$.

Démonstration. a) L'image de $p+q-1$ est contenue dans $pE+(1-q)E$ et dans $(1-p)E+qE$. Il en résulte que (iv) $\Rightarrow$ (i).

Si (i) est vérifié, $p((1-p)E+qE) = pqE$ est dense dans pE et $(1-p)((1-q)E+pE) = (1-p)(1-q)E$ est dense dans $(1-p)E$. Donc (i) $\Rightarrow$ (ii).

Pour $y \in qE$ et $z \in (1-q)E$ on a $(p+q-1)(y+z) = py-(1-p)z$. Donc l'image de $p+q-1$ est $pqE+(1-p)(1-q)E$, donc (ii) $\Rightarrow$ (iv).

Enfin, échangeant les rôles de p et q on trouve (iii) $\iff$ (iv).

b) Soit $w \in \mathrm{Mor}(E)$ un unitaire ; le projecteur d'image wpE est wpw^*. Donc $wpE = qE$ si et seulement si $wpw^* = q$ *i.e.* $wp = qw$; dans ce cas $(1-p)w = w(1-q)$, donc $w(1-p)E = (1-q)E$.

Posons $T = p+q-1$ et soit $w \in \mathrm{Mor}(E)$ un unitaire tel que $wp = qw$. On a $pwp-(1-p)w(1-p) = w(qp-(1-q)(1-p)) = wT$. Remarquons que, si $wT \in \mathrm{Mor}(E)_+$ alors $pwp = pwTp \in \mathrm{Mor}(E)_+$ et $-(1-p)w(1-p) = (1-p)wT(1-p) \in \mathrm{Mor}(E)_+$.

Il suffit donc de montrer qu'il existe un unique unitaire w tel que $wT \in \mathrm{Mor}(E)_+$ et qu'on a $pw = wq$ et $w^2 = 1$.

Puisque $wT \geqslant 0$, on a $wT = |wT| = |T|$ et la connaissance de wT détermine w puisque l'image de T est dense, d'où l'unicité de w.

Le morphisme T est hermitien ; comme son image est dense, il admet une décomposition polaire $T = w|T|$ (cor 13.24). Comme T est hermitien, $w = w^* = w^{-1}$. Remarquons que $pT = Tq$ et $qT = Tp$; donc $pT^2 = TqT = T^2p$. Il en résulte que $pf(T^2) = f(T^2)p$ pour toute fonction continue f. Or w est limite forte de la suite $w_n = (1/n+T^2)^{-1/2}T$, donc pw qui est limite forte de la suite $pw_n = (1/n+T^2)^{-1/2}pT = w_nq$, est égal à wq. $\square$

13.28 Proposition. *Soient A une C^*-algèbre, E et F des A-modules hilbertiens, E_1 un sous-module fermé de E et F_1 un sous-module fermé de F.*

a) Un élément $T \in \mathcal{K}(E,F)$ tel que $TE \subset F_1$ et $T^*F \subset E_1$ définit par restriction un élément $T_1 \in \mathcal{K}(E_1,F_1)$.

b) Tout élément $T_1 \in \mathcal{K}(E_1,F_1)$ s'étend de manière unique en un élément $T \in \mathcal{K}(E,F)$ tel que $TE \subset F_1$ et $T^*F \subset E_1$.

Démonstration. a) Par la prop. 13.17.a) appliquée au $\mathcal{K}(E)$-module hilbertien $\mathcal{K}(E,F)$, il existe un morphisme $S \in \mathcal{K}(E,F)$ tel que $SS^*S = T$. Par le lemme 13.20.a) les adhérences de SE de SS^*F et $TS^*F = (SS^*)^2E$ coïncident. Il en résulte que SE est inclus dans F_1. De même, S^*F est inclus dans E_1. Par le lemme 13.20.b), S définit par restriction des éléments $S_1 \in \mathrm{Mor}(E_1,F)$ et $S_2 \in \mathrm{Mor}(E,F_1)$. La restriction de T est alors $T_1 = S_1S^*S_2 \in \mathcal{K}(E_1,F_1)$.

b) L'existence de l'extension est claire pour les somme finie de morphismes de la forme $\theta_{x,y}$; le cas général s'en déduit car $\mathcal{K}(E,F)$ est complet. Si S et T coïncident sur E_1 et si $S^*F \subset E_1$ et $T^*F \subset E_1$, alors $(S-T)(S-T)^* = 0$, d'où l'unicité. $\square$

13.9 Le Théorème de stabilisation de Kasparov

13.29 Théorème. *Soient A une C^*-algèbre, E un A-module hilbertien dénombrablement engendré. Alors les A-modules hilbertiens $\mathcal{H}_A$ et $E \oplus \mathcal{H}_A$ sont isomorphes.*

Démonstration. a) Supposons d'abord que A est unifère. Remarquons qu'un A-module hilbertien F est isomorphe à $\mathcal{H}_A$ si et seulement s'il admet une *A-base orthonormale* infinie dénombrable, *i.e.* une partie génératrice, infinie, dénombrable $B \subset F$ telle que, pour tout $b,c \in B$, $b \neq c$ on ait $\langle b,b\rangle = 1$ et $\langle b,c\rangle = 0$.

Soit D un ensemble dénombrable engendrant E et soit $B = \{ f_n \,,\ n \in \mathbb{N} \}$ une base orthonormale de $\mathcal{H}_A$. Construisons une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, d'éléments de $B \cup D \subset E \oplus \mathcal{H}_A$ qui prend une infinité de fois chacune des valeurs de $B \cup D$.

Pour $m \in \mathbb{N}$ posons $E_m = E \oplus \displaystyle\bigoplus_{k=0}^{m-1} f_k A$.

On construit par récurrence sur n une suite croissante de nombres entiers m_n et une suite e_n d'éléments de $E \oplus \mathcal{H}_A$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $e_n \in E_{m_n+1}$, $\langle e_n, e_n\rangle = 1$ et, si on pose $F_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e_k A$, $e_n \in F_n^{\perp}$ et $d(x_n, F_{n+1}) \leqslant (n+1)^{-1}$ où $d(x_n, F_{n+1}) = \|x_n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} e_k\langle e_k, x_n\rangle\|$ est la distance de x_n à F_{n+1}.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons m_k et e_k construits pour tout $k < n$. Soit $m_n > \sup\{ m_k \,,\ k < n \}$, tel que $y_n \in E_{m_n}$. Posons $y_n = x_n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e_k\langle e_k, x_n\rangle$ et $z_n = y_n + (n+1)^{-1} f_{m_n}$. Comme $y_n \in E_{m_n}$, on a $\langle z_n, z_n\rangle = \langle y_n, y_n\rangle + (n+1)^{-2}$. Donc $\mathrm{Sp}(\langle z_n, z_n\rangle) \subset [(n+1)^{-2}, +\infty[$. Posons $e_n = z_n(\langle z_n, z_n\rangle)^{-1/2}$. Alors $\langle e_n, e_n\rangle = 1$; de plus $y_n \in F_n^{\perp}$ et $f_{m_n} \in F_n^{\perp}$, donc $e_n \in F_n^{\perp}$; il est clair que $e_n \in E_{m_n+1}$; enfin, $x_n + (n+1)^{-1} f_{m_n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e_k\langle e_k, x_n\rangle + z_n \in F_{n+1}$, donc $d(x_n, F_{n+1}) \leqslant (n+1)^{-1}$.

Le système $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormal. Notons F le sous-module fermé de $E \oplus \mathcal{H}_A$ engendré par$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $y \in B \cup D$ et tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant p$ tel que $y = x_n$; donc $d(y, F) \leqslant d(y, F_{n+1}) \leqslant (p+1)^{-1}$. Il en résulte que $B \cup D \subset F$, donc $E \oplus \mathcal{H}_A = F$ admet la base orthonormale $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d'où le résultat dans le cas unifère.

b) cas général. Par le cas unifère, les $\tilde{A}$-modules hilbertiens $\mathcal{H}_{\tilde{A}}$ et $E \oplus \mathcal{H}_{\tilde{A}}$ sont isomorphes. Les A-modules hilbertiens $\mathcal{H}_A = \{ x \in \mathcal{H}_{\tilde{A}} \,,\ \langle x, x\rangle \in A \}$ et $E \oplus \mathcal{H}_A = \{ x \in E \oplus \mathcal{H}_{\tilde{A}} \,,\ \langle x, x\rangle \in A \}$ sont donc isomorphes. □

13.10 Composition des modules hilbertiens

13.30 Proposition. *Soient A une C^*-algèbre, E un A-module hilbertien, H un B-module hilbertien et $\varphi : A \to \mathrm{Mor}(H)$ un homomorphisme involutif. Pour $x, y \in E$, $\xi, \eta \in H$ et $b \in B$ posons $(x \otimes \xi)b = x \otimes \xi b$ et $\langle x \otimes \xi, y \otimes \eta\rangle = \langle \xi, \varphi(\langle x, y\rangle)\eta\rangle$. Muni de la structure de B-module à droite et de l'application sesquilinéaire $\langle\ ,\ \rangle$ ainsi définis, le produit tensoriel algébrique $E \otimes H$ est un B-module préhilbertien.*

Démonstration. On doit montrer que pour tout $z = \displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant n} x_i \otimes \xi_i \in E \otimes H$ on a $\langle z, z\rangle \in B_+$. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de E. Le n-uple $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est un élément du $M_n(A)$-module hilbertien $\mathcal{K}(A^n, E)$ (exemple 13.12.e). Donc la matrice $(\langle x_i, x_j\rangle)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est l'élément positif x^*x de $\mathcal{K}(A^n) = M_n(A)$ et la matrice $(\varphi(\langle x_i, x_j\rangle))_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \varphi \otimes \mathrm{id}(x^*x)$ est un élément positif de la C^*-algèbre $M_n(\mathrm{Mor}(H)) = \mathrm{Mor}(H^n)$. En particulier $\langle z, z\rangle = \displaystyle\sum_{i,j} \langle \xi_i, (\langle x_i, x_j\rangle)\xi_j\rangle = \langle \eta, T\eta\rangle$ est un élément positif de B, où $\eta = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in H^n$. □

Notation. — Le B-module hilbertien séparé complété du B-module préhilbertien $E \otimes H$ est noté $E \otimes_\varphi H$ et parfois $E \otimes_A H$, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté possible sur l'homomorphisme φ.

Exemple. — Soient A une C^*-algèbre E un A-module hilbertien et H un espace hilbertien. Considérons l'homomorphisme $\pi : \mathbb{C} \to \mathrm{Mor}(E)$ tel que $\pi(1) = 1$. On obtient ainsi le A-module hilbertien $H \otimes_{\mathbb{C}} E$.

En particulier, si H est un espace hilbertien séparable de dimension infinie, il est isomorphe à l'espace $\ell^2(\mathbb{N})$ des suites de carré intégrable et $H \otimes_{\mathbb{C}} E$ est isomorphe à $\mathcal{H}_A$. Si $A = \mathbb{C}$ l'espace hilbertien $H \otimes_{\mathbb{C}} E$ coïncide avec le produit tensoriel usuel des espaces hilbertiens H et E.

13.31 Lemme. *Soient A, B des C^*-algèbres et E un B-module préhilbertien. Notons H le séparé complété de E, $\rho : E \to H$ l'application canonique de E dans son séparé-complété, et $\mathrm{End}_B(E)$ l'algèbre des endomorphismes du B-module à droite E. Soit $\varphi : A \to \mathrm{End}_B(E)$ un homomorphisme d'algèbres tel que pour tout $a \in A$ et tout $x, y \in E$ on ait $\langle \varphi(a)x, y\rangle = \langle x, \varphi(a^*)y\rangle$. Il existe une unique représentation $\pi : A \to \mathrm{Mor}(H)$ telle que pour tout $a \in A$ on ait $\pi(a) \circ \rho = \rho \circ \varphi(a)$.*

Démonstration. Soit $a \in A$ tel que $\|a\| \leqslant 1$. Posons $b = g(a^*a)$ où $g(t) = (1-t)^{1/2} - 1$, $t \in [0,1]$; alors $b \in A$ (comme $g(0) = 0$), $b = b^*$ et $a^*a + b^2 + 2b = 0$. Pour tout $x \in E$, on a $\langle \varphi(a)x, \varphi(a)x\rangle + \langle \varphi(b)x + x, \varphi(b)x + x\rangle = \langle x, \varphi(a^*a + b^2 + 2b)x + x\rangle = \langle x, x\rangle$, donc $\langle \varphi(a)x, \varphi(a)x\rangle \leqslant \langle x, x\rangle$ *i.e.* $\|\varphi(a)x\| \leqslant \|x\|$. L'application $\rho \circ \varphi(a) : E \to H$ est donc continue ; il existe une unique application linéaire continue $\pi(a) : H \to H$ telle que $\pi(a) \circ \rho = \rho \circ \varphi(a)$. On a $\langle \pi(a)x, y\rangle = \langle x, \pi(a^*)y\rangle$ pour tout $x, y \in \rho(E)$ donc, par continuité, pour tout $x, y \in H$; donc $\pi(a) \in \mathrm{Mor}(H)$.

Il est clair que π est un homomorphisme de C^*-algèbres. Enfin, l'égalité $\pi(a) \circ \rho = \rho \circ \varphi(a)$ détermine $\pi(a)$, d'où l'unicité de π. □

13.32 Proposition. *Soient A une C^*-algèbre, E un A-module hilbertien, H un B-module hilbertien et $\varphi : A \to \mathrm{Mor}(H)$ une représentation.*

a) Pour tout $T \in \mathrm{Mor}(E)$ l'application $x \otimes \xi \mapsto Tx \otimes \xi$ définit un morphisme $T \otimes_\varphi 1 \in \mathrm{Mor}(E \otimes_\varphi H)$. L'application $T \mapsto T \otimes_\varphi 1$ est un homomorphisme de C^*-algèbres. Si φ est injective, alors l'application $T \mapsto T \otimes_\varphi 1$ est injective.

b) Si $S \in \mathrm{Mor}(H)$ commute à $\varphi(A)$ l'application $x \otimes \xi \mapsto x \otimes S\xi$ définit un morphisme $1 \otimes_\varphi S \in \mathrm{Mor}(E \otimes_\varphi H)$ et pour tout $T \in \mathrm{Mor}(E)$, $1 \otimes_\varphi S$ commute à $T \otimes_\varphi 1$.

Démonstration. Le seul énoncé qui ne résulte pas du lemme 13.31, est l'injectivité de l'application $T \mapsto T \otimes_\varphi 1$. Or, si $T \neq 0$, il existe $x \in E$ tel que $Tx \neq 0$, donc $\langle Tx, Tx\rangle \neq 0$. Si φ est fidèle, il existe $\xi \in H$ tel que $\varphi(\langle Tx, Tx\rangle)\xi \neq 0$, et comme $\varphi(\langle Tx, Tx\rangle) \geqslant 0$, il en résulte que $\langle \xi, \varphi(\langle Tx, Tx\rangle)\xi\rangle \neq 0$ *i.e.* $\langle (T \otimes_\varphi 1)(x \otimes \xi), (T \otimes_\varphi 1)(x \otimes \xi)\rangle \neq 0$. □

13.33 Corollaire. *Soient A une C^*-algèbre, E, F des A-module hilbertiens, H un B-module hilbertien et $\varphi : A \to \mathrm{Mor}(H)$ une représentation. Pour tout $T \in \mathrm{Mor}(E, F)$ l'application $x \otimes \xi \mapsto Tx \otimes \xi$ définit un morphisme $T \otimes_\varphi 1 \in \mathrm{Mor}(E \otimes_\varphi H, F \otimes_\varphi H)$.*

Démonstration. Il est clair que $(E \oplus F) \otimes_\varphi H$ s'identifie à $(E \otimes_\varphi H) \oplus (F \otimes_\varphi H)$. Soit $T \in \mathrm{Mor}(E, F)$ et définissons $S \in \mathrm{Mor}(E \oplus F)$ en posant $S(x, y) = (0, Tx)$. Alors $S \otimes_\varphi 1$ définit par restriction un opérateur $T \otimes_\varphi 1 \in \mathrm{Mor}(E \otimes_\varphi H, F \otimes_\varphi H)$. □

Exemple. — Soit φ une représentation d'une C^*-algèbre A dans un B-module hilbertien H. Le B-module hilbertien $A \otimes_\varphi H$ s'identifie au sous-module $\varphi(A)H$ de H ; en particulier, si φ est non dégénérée, $A \otimes_\varphi H$ s'identifie à H. Soit $\pi : A_1 \to M(A)$ un morphisme de C^*-algèbres. La représentation φ_π de A_1 dans $A \otimes_\varphi H \simeq \varphi(A)H$ est la composée de π et de l'extension de φ à l'algèbre des multiplicateurs.

14 Opérateurs non bornés dans les modules hilbertiens

14.1 Opérateurs non bornés dans les espaces de Banach

14.1.1 Généralités sur les opérateurs

Soient E et F des espaces vectoriels.

- Un *opérateur* T de E dans F est donné par un sous-espace vectoriel $\operatorname{dom} T$ de E appelé *domaine* de T et une application linéaire T de $\operatorname{dom} T$ dans F.
- On appelle respectivement *noyau* et *image* d'un opérateur T le sous-espace $\ker T = \{ x \in \operatorname{dom} T\,,\ Tx = 0 \}$ de E et le sous-espace $\operatorname{im} T = T(\operatorname{dom} T)$ de F.
- Soit T un opérateur. Le *graphe* de T est le sous-espace $G(T) = \{ (x, Tx)\,,\ x \in \operatorname{dom} T \}$ de $E \times F$. La restriction à $G(T)$ de la première projection est injective. Réciproquement, soit G un sous-espace vectoriel de $E \times F$ et supposons que la restriction de la première projection à G est injective. Notons $p_1 : G \to E$ et $p_2 : G \to F$ les projections et définissons l'opérateur T en posant $\operatorname{dom} T = p_1(G)$ et $T(p_1(x)) = p_2(x)$ pour tout $x \in G$. Il est clair que $G(T) = G$. Comme le noyau de la première projection de $E \times F$ dans E est le sous-espace $\{0\} \times F$ de $E \times F$, la correspondance qui à un opérateur associe son graphe est une correspondance biunivoque entre opérateurs et sous espaces G de $E \times F$ tels que $G \cap (\{0\} \times F) = \{0\}$.
- On appelle *extension* de l'opérateur T tout opérateur S tel que $G(T) \subset G(S)$. On écrit alors $T \subset S$.
- Soit T un opérateur et D un sous-espace vectoriel de $\operatorname{dom} T$. On note $T|D$ l'opérateur tel que $T|D \subset T$ et $\operatorname{dom} T|D = D$.
- Soient S et T des opérateurs de E dans F. On définit l'opérateur $S+T$ en posant $\operatorname{dom} S+T = \operatorname{dom} S \cap \operatorname{dom} T$ et, pour tout $x \in \operatorname{dom} S+T\,,\ (S+T)(x) = S(x)+T(x)$. Si $R\,,\ S$ et T sont des opérateurs de E dans F, on a clairement $R+S = S+R$ et $(R+S)+T = R+(S+T)$.
- Soient $E\,,\ F$ et G des espaces vectoriels, T un opérateur de E dans F et S un opérateur de F dans G. On définit l'opérateur ST en posant $\operatorname{dom} ST = \{ x \in \operatorname{dom} T\,,\ Tx \in \operatorname{dom} S \}$ et, pour tout $x \in \operatorname{dom} ST\,,\ (ST)x = S(Tx)$. Si R est un opérateur de G dans un espace vectoriel H, on a $(RS)T = R(ST)$.
- De plus, si T est un opérateur de E dans F et R et S sont des opérateurs de F dans G on a $(R+S)T = RT+ST$; cependant, si R et S sont des opérateurs de E dans F et T est un opérateur de F dans G, on a $TR+TS \subset T(R+S)$ sans, en général, avoir l'égalité.
- Un opérateur T de E dans F est dit *injectif* si l'application $T : \operatorname{dom} T \to F$ est injective. Soit T un opérateur injectif de E dans F ; l'ensemble $\{ (y,x) \in F \times E\,,\ (x,y) \in G(T) \}$ est le graphe d'un opérateur T^{-1} (de domaine $\operatorname{im} T$) appelé *inverse* de T. Clairement T^{-1} est injectif et $(T^{-1})^{-1} = T$. Si $T : E \to F$ et $S : F \to H$ sont injectifs, alors ST est injectif et $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.

14.1 Définition. Soient E et F des espaces localement convexes séparés.

- Un opérateur de E dans F est dit *densément défini* si son domaine est dense dans E.
- Un opérateur de E dans F est dit *fermé* si son graphe est un sous-espace fermé de $E \times F$. Un opérateur de E dans F est dit *fermable* s'il admet une extension fermée.

14.2 Remarques. a) Contrairement à la notion de morphisme de E dans F, celle d'opérateur fermé ou fermable ne change pas si on modifie les topologies de E et F sans changer leur dual topologique.

b) Soient E et F des espaces localement convexes et T un opérateur fermé de E dans F. Alors $\ker T = \{ x \in E\,,\ (x,0) \in G(T) \}$ est un sous espace fermé de E. Remarquons de plus que F est automatiquement séparé.

c) Soit S une extension fermée de l'opérateur T. Alors $G(S)$ contient $G(T)$, donc son adhérence $\overline{G(T)}$.

Il s'ensuit qu'un opérateur T est fermable si et seulement si $\overline{G(T)}$ est le graphe d'un opérateur. On notera $\overline{T}$ et on appellera *fermeture* de T l'application fermée de graphe $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$.

En particulier, pour que l'opérateur T soit fermable il faut et il suffit que $\overline{G(T)} \cap (\{0\} \times F) = \{0\}$.

On en déduit immédiatement :

14.3 Proposition. *Soient E et F des espaces localement convexes séparés et T un opérateur de E dans F. Pour que T soit fermable il faut et il suffit que pour tout filtre $\mathcal{F}$ de $\operatorname{dom} T$ tel que $\mathcal{F}$ converge vers 0 dans E et $T\mathcal{F}$ converge vers $y \in F$ on ait $y = 0$.* □

14.4 Proposition. *L'inverse d'un opérateur injectif fermé est fermé.*

Démonstration. Soient E et F des espaces localement convexes séparés et T un opérateur fermé de E dans F. Comme le graphe de T^{-1} se déduit de celui de T par la symétrie $(x, y) \mapsto (y, x)$, il est fermé. □

14.5 Lemme. *a) Soient E et F des espaces localement convexes séparés, S et T des opérateurs fermés de E dans F. S'il existe une application linéaire continue $u : E \times F \to F$ telle que, pour tout $x \in \operatorname{dom} S + T$, on ait $u(x, (S + T)x) = Sx$, alors $S + T$ est fermé.*

b) Soient E, F et H des espaces localement convexes séparés, T un opérateur fermé de E dans F et S un opérateur fermé de F dans H. S'il existe une application linéaire continue $u : E \times H \to F$ telle que, pour tout $x \in \operatorname{dom} ST$, on ait $u(x, (ST)x) = Tx$, alors ST est fermé.

Démonstration. a) On a $G(S+T) = \{\, (x, y) \in E \times F \,, (x, u(x, y)) \in G(S) \,,\ (x, y - u(x, y) \in G(T) \,\}$.

b) On a $G(ST) = \psi^{-1}(G(S) \times G(T))$ où $\psi : E \times H \to (F \times H) \times (E \times F)$ est l'application linéaire continue $(x, z) \mapsto ((u(x, z), z), (x, u(x, z)))$. □

14.6 Proposition. *Soient E, F et H des espaces localement convexes séparés.*

a) Soient $S : E \to F$ une application linéaire continue et T un opérateur de E dans F ; pour que $S + T$ soit fermé il faut et il suffit que T le soit ; pour que $S + T$ soit fermable il faut et il suffit que T le soit et, dans ce cas, $\overline{S + T} = S + \overline{T}$.

b) Soient $T : E \to F$ une application linéaire continue et S un opérateur fermé (resp. fermable) de F dans H. L'opérateur ST est fermé (resp. fermable).

c) Soient T un opérateur fermé (resp. fermable) de E dans F et $S : H \to F$ une application linéaire continue injective. L'opérateur $S^{-1}T$ est fermé (resp. fermable).

Démonstration. a) Si T est fermé, $S + T$ est fermé par lemme 14.5.a) (en posant $u(x, y) = Sx$). Si T est fermable, $S + T$ admet l'extension $S + \overline{T}$ qui est un opérateur fermé par ce qui précède ; il en résulte que $S + T$ est fermable et $\overline{S + T} \subset S + \overline{T}$.

Remplaçant T par $T + S$ et S par $-S$ on trouve que si $T + S$ est fermé ou fermable il en va de même pour T et que dans ce cas, $\overline{T} \subset \overline{S + T} - S$; donc $S + \overline{T} \subset S + \overline{S + T} - S = \overline{S + T}$.

b) Si S est fermé, il en va de même pour ST par le lemme 14.5.b) (en posant $u(x, z) = Tx$). Si S est fermable, alors ST admet l'extension fermée $\overline{S}T$.

c) Si T est fermé, il en va de même pour $S^{-1}T$ par le lemme 14.5.b) (en posant $u(x, z) = Sz$). Si T est fermable, alors $S^{-1}T$ admet l'extension fermée $S^{-1}\overline{T}$. □

Remarque. — Si S est une application linéaire continue de F dans H et T est un opérateur fermé de E dans F, ST n'est en général pas fermable (cf. exerc**??**.)

Soient E et F des espaces localement convexes séparés et T un opérateur fermable de E dans F. Un sous-espace D du domaine de T est appelé un *domaine essentiel* pour T si les opérateurs T et $T|D$ ont même fermeture. Cela revient à dire que D est dense dans $\operatorname{dom} T$ pour la topologie du graphe.

14.1.2 Spectre des opérateurs fermés

14.7 Définition. Soient T un opérateur d'un espace localement convexe séparé E dans lui même et $\lambda \in \mathbb{C}$. On dit que λ est une *valeur régulière* de T si $T - \lambda \mathrm{id}_E$ est une application linéaire bijective de $\operatorname{dom} T$ sur E et l'application linéaire réciproque définit une application linéaire continue $R_\lambda(T)$ de E dans lui même. On appelle *spectre* de T le complémentaire $\operatorname{Sp} T$ dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble des valeurs régulières de T.

14.8 Proposition. *Soient T un opérateur fermé d'un espace localement convexe séparé E dans lui même.*

a) Soient λ et μ des valeurs régulières de T ; on a $R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\lambda - \mu) R_\lambda(T) R_\mu(T)$.

b) La famille $\{ R_\lambda(T)\, ,\ \lambda \in \mathbb{C} - \operatorname{Sp} T \}$ est une partie commutative de $\operatorname{End}(E)$.

c) Si T est injectif et λ est une valeur régulière de T non nulle, alors λ^{-1} est une valeur régulière de T^{-1} et on a $R_{\lambda^{-1}}(T^{-1}) = -\lambda T R_\lambda(T) = -\lambda id_E - \lambda^2 R_\lambda(T)$.

Démonstration. a) On a $(T - \mu \mathrm{id}_E) R_\lambda(T) = (T - \lambda \mathrm{id}_E) R_\lambda(T) + (\lambda - \mu) R_\lambda(T) = \mathrm{id}_E + (\lambda - \mu) R_\lambda(T)$. Donc $R_\mu(T) + (\lambda - \mu) R_\lambda(T) R_\mu(T) = (T - \mu \mathrm{id}_E) R_\lambda(T) R_\mu(T) = (T - \mu \mathrm{id}_E) R_\mu(T) R_\lambda(T) = R_\lambda(T)$.

b) découle de (a).

c) On a $T^{-1} - \lambda^{-1} \mathrm{id}_E = -\lambda^{-1}(T - \lambda \mathrm{id}_E) T^{-1}$, vu que ces opérateurs ont même domaine (l'image de T) et y coïncident. Il en résulte que $T^{-1} - \lambda^{-1} \mathrm{id}_E$ est bijectif de $\operatorname{dom} T^{-1}$ sur E, et son application réciproque est $-\lambda T R_\lambda(T)$. Or $T R_\lambda(T) - \lambda R_\lambda(T) = \mathrm{id}_E$; on en déduit l'égalité $-\lambda T R_\lambda(T) = -\lambda \mathrm{id}_E - \lambda^2 R_\lambda(T)$, dont il résulte que $-\lambda T R_\lambda(T)$ est continu et (c). $\square$

14.1.3 Opérateurs fermés dans les espaces de Banach

Soit T un opérateur continu d'un espace vectoriel normé E dans un espace de Banach F. Alors T est fermable et sa fermeture est son prolongement par continuité à l'adhérence de son domaine. En particulier, pour qu'un opérateur continu de E dans F soit fermé, il faut et il suffit que son domaine soit fermé.

Soit T un opérateur fermé d'un espace de Banach E dans lui même. Remarquons que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $T - \lambda \mathrm{id}_E$ est fermé (prop. 14.6.a). Si $T - \lambda \mathrm{id}_E$ est injectif d'image dense et son inverse est continu, alors λ est une valeur régulière car $(T - \lambda \mathrm{id}_E)^{-1}$ est fermé (prop. 14.4), donc son domaine est fermé.

Par ailleurs, un opérateur fermé de domaine fermé entre espaces de Banach est continu (théorème du graphe fermé). Soit alors T un opérateur fermé d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F ; si T est bijectif de $\operatorname{dom} T$ sur F, alors T^{-1} est continu. Il s'ensuit que le spectre d'un opérateur fermé T d'un espace de Banach E dans lui même est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $T - \lambda$ ne soit pas bijectif de $\operatorname{dom} T$ sur F.

14.9 Proposition. *a) Le spectre d'un opérateur fermé T d'un espace de Banach E dans lui même est une partie fermée de $\mathbb{C}$.*

b) *L'application* $\lambda \mapsto R_\lambda(T)$ *est analytique du complémentaire du spectre dans l'algèbre* $\mathrm{End}(E)$ *des endomorphismes de* E.

Démonstration. Si $\mathrm{Sp}\, T = \emptyset$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, quitte à remplacer T par $T - \lambda \mathrm{id}_E$, on peut supposer que 0 est une valeur régulier de$\mathbb{C}$. On pose $S = T^{-1}$.

a) Il résulte de la prop. 14.8.c) que $\mathrm{Sp}\, T = \{\, \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}\, ,\ \lambda^{-1} \in \mathrm{Sp}\, S \,\}$ et comme $\mathrm{Sp}\, S$ est une partie compacte de $\mathbb{C}$, $\mathrm{Sp}\, T$ est une partie fermée de $\mathbb{C}$.

b) Par la prop. 14.8.c), pour toute valeur régulière non nulle de T on a $R_\lambda(T) = -\lambda^{-1} S R_{\lambda^{-1}}(S)$. Donc l'application $\lambda \mapsto R_\lambda(T)$ est analytique sur le complémentaire de 0. Comme $\mathrm{Sp}\, T$ est fermé, il existe une valeur régulière non nulle λ de T. Appliquant ce qui précède à $T - \lambda \mathrm{id}_E$ on en déduit que $\lambda \mapsto R_\lambda(T)$ est analytique au voisinage de 0. □

Le spectre d'un opérateur fermé peut être n'importe quelle partie fermée de $\mathbb{C}$: soit F une partie fermée de $\mathbb{C}$. Notons z la fonction $\lambda \mapsto \lambda$ de F dans $\mathbb{C}$. Nous verrons plus bas que $f \mapsto zf$ définit un opérateur fermé de $C_0(\mathbb{C})$ dans lui même, dont le spectre est F.

Par ailleurs, notons V l'opérateur de Voltera : c'est l'opérateur de l'espace de Hilbert $L^2([0,1])$ des fonctions de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ donné par la formule $(Vf)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$. Il est injectif et son image est dense (elle contient l'ensemble des fonctions continûment dérivables sur $[0,1]$ nulles en 0). Posons $S = V^{-1}$. Son domaine est l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$, nulles en 0 et dont la dérivée (au sens des distributions) est de carré intégrable ; pour $f \in \mathrm{dom}\, S$ $Sf = f'$. Comme le spectre de V est réduit à $\{0\}$, on a $\mathrm{Sp}\, S = \emptyset$ (lemme 14.8).

Soient S, T deux opérateurs fermés d'un espace de Banach E dans lui même tels que $S \subset T$ et $S \neq T$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et supposons que $S - \lambda$ est surjectif. soit $x \in \mathrm{dom}\, T - \mathrm{dom}\, S$; il existe $y \in \mathrm{dom}\, S$ tel que $(T - \lambda)y = (S - \lambda)y = (T - \lambda)x$, d'où l'on déduit que $T - \lambda$ n'est pas injectif. On en déduit que $\mathrm{Sp}\, S \cup \mathrm{Sp}\, T = \mathbb{C}$.

En particulier, si T est un opérateur qui prolonge strictement l'opérateur noté S ci-dessus, on a $\mathrm{Sp}\, T = \mathbb{C}$; par exemple, notons T l'opérateur $f \mapsto f'$ dont le domaine est l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ et dont la dérivée (au sens des distributions) est de carré intégrable ; pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'application $t \mapsto e^{t\lambda}$ est dans le noyau de $T - \lambda$.

14.2 Opérateurs réguliers dans les modules hilbertiens

14.2.1 L'adjoint d'un opérateur

Soient A une C^*-algèbre, E et F des A-modules hilbertiens. Nous dirons qu'un opérateur de E dans F est A-linéaire, si son graphe est un sous- A-module de $E \oplus F$.

Soit T un opérateur de E dans F. Supposons que l'orthogonal dans E de $\mathrm{dom}\, T$ soit réduit à $\{0\}$. On définit *l'adjoint* de T qui est un opérateur A-linéaire T^* de F dans E en posant $G(T^*) = \{\, (y, x) \in F \times E\, ,\ \forall z \in \mathrm{dom}\, T\, ,\ \langle x, z\rangle = \langle y, Tz\rangle \,\}$. Soit $U_0 \in \mathrm{Mor}(F \oplus E, E \oplus F)$ le morphisme unitaire qui à $(y, x) \in F \oplus E$ associe $(x, -y)$. Le graphe $G(T^*)$ de T^* est l'orthogonal dans le A-module $F \oplus E$ de $U_0^* G(T)$. Un opérateur T de E dans lui même est dit *autoadjoint* si $T = T^*$.

Remarquons que T^* est A-linéaire et fermé par définition. Si l'orthogonal dans E de $\mathrm{dom}\, T$ est réduit à $\{0\}$ et l'orthogonal dans F de $\mathrm{dom}\, T^*$ est réduit à $\{0\}$, alors $T \subset (T^*)^*$ donc T est fermable.

14.10 Proposition. *Soient* A *une* C^**-algèbre,* E, F *et* H *des* A*-modules hilbertiens.*

a) Soient S et T des opérateurs de E dans F tels que $(\mathrm{dom}\, S \cap \mathrm{dom}\, T)^\perp = \{0\}$. Alors $S^* + T^* \subset (S+T)^*$. Si $S \in \mathrm{Mor}(E,F)$, alors $(S+T)^* = S^* + T^*$.

b) Soit T un opérateur injectif de E dans F tel que les orthogonaux respectifs de $\mathrm{dom}\, T$ dans E et de $\mathrm{im}\, T$ dans F soient réduits à $\{0\}$. Alors T^* est injectif et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

c) Soient T un opérateur de E dans F et S un opérateur de F dans H tels que les orthogonaux respectifs de $\mathrm{dom}\, ST$ dans E et de $\mathrm{dom}\, S$ dans F soient réduits à $\{0\}$. On a $T^*S^* \subset (ST)^*$. Si S est un morphisme ou si T est l'inverse d'un morphisme injectif, alors $T^*S^* = (ST)^*$.

Démonstration. a) La première assertion est claire. Si $S \in \mathrm{Mor}(E,F)$, on a $T = (S+T) + (-S)$ donc, par la première assertion, $(S+T)^* - S^* \subset T^*$; on en déduit que $(S+T)^* = (S+T)^* - S^* + S^* \subset S^* + T^*$, d'où a).

b) Il est clair que $\ker T^* = \mathrm{im}\, T^\perp = \{0\}$ donc T^* est injectif. Le graphe de T^{-1} se déduit de celui de T par la symétrie $(x,y) \mapsto (y,x)$; donc son orthogonal est $\{\,(x,y) \;\; (y,x) \in G(T)^\perp\,\} = \{\,(x, -T^*x)\,,\ x \in \mathrm{dom}\, T^*\,\} = \{\,(-(T^*)^{-1}y, y)\,,\ y \in \mathrm{dom}\,(T^*)^{-1}\,\}$, d'où il ressort que $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

c) La première assertion est claire.

Si S est un morphisme, pour tout $z \in \mathrm{dom}(ST)^*$ et tout $x \in \mathrm{dom}\, T = \mathrm{dom}\, ST$ on a $\langle x, (ST)^*z\rangle = \langle STx, z\rangle = \langle Tx, S^*z\rangle$ d'où il ressort que $S^*z \in \mathrm{dom}\, T^*$ et $T^*S^*z = (ST)^*z$.

Si T est l'inverse d'un morphisme injectif, pour tout $z \in \mathrm{dom}(ST)^*$ et tout $y \in \mathrm{dom}\, S$, $T^{-1}y \in \mathrm{dom}\, ST$ et $ST(T^{-1}y) = Sy$, donc $\langle Sy, z\rangle = \langle T^{-1}y, (ST)^*z\rangle = \langle y, (T^{-1})^*(ST)^*z\rangle$ d'où il ressort (par b) que $y \in \mathrm{dom}\, S^*$, $S^*y = (T^*)^{-1}(ST)^*z \in \mathrm{dom}\, T^*$ et $T^*S^*y = (ST)^*y$. □

14.2.2 Opérateurs réguliers

14.11 Lemme. *Soient A une C^*-algèbre, E et F des A-modules hilbertiens et T un opérateur fermé de E dans F tel que l'orthogonal dans E de $\mathrm{dom}\, T$ soit réduit à $\{0\}$. Notons $U_0 \in \mathrm{Mor}(F \oplus E, E \oplus F)$ le morphisme $(y,x) \mapsto (x, -y)$.*

a) L'image de $(1 + T^*T)$ est $\{\,x \in E\,,\ (x,0) \in G(T) + U_0G(T^*)\,\}$. L'image de $(1+TT^*)$ est $\{\,y \in F\,,\ (0,y) \in G(T) + U_0G(T^*)\,\}$.

b) Si de plus T et T^* sont densément définis, les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) L'image de $1 + T^*T$ est dense.

(ii) $1 + T^*T$ est surjective.

(iii) $1 + TT^*$ est surjective.

(iv) Le graphe de T est un sous-module orthocomplémenté du A-module hilbertien $E \oplus F$.

Si T satisfait à ces conditions, il en va de même pour T^* et l'on a $(T^*)^* = T$.

Démonstration. a) Soit $z \in \mathrm{dom}\, 1 + T^*T$; posons $y = Tz$; alors $y \in \mathrm{dom}\, T^*$ et $((1+T^*T)z, 0) = (z, Tz) + (T^*y, -y) \in G(T) + U_0G(T^*)$. Inversement, soit $x \in E$ tel que $(x,0) \in G(T) + U_0G(T^*)$. Il existe alors $z \in \mathrm{dom}\, T$ et $y \in \mathrm{dom}\, T^*$ tels que $(x,0) = (z,Tz) + (T^*y, -y)$. Alors $y = Tz$ donc $z \in \mathrm{dom}\, T^*T = \mathrm{dom}\, 1 + T^*T$ et $x = (1+T^*T)z$, d'où a). La deuxième assertion est identique...

b) Comme T et T^* sont fermés et que $G(T)$ et $U_0G(T^*)$ sont orthogonaux, $G(T) + U_0G(T^*)$ est un sous-module fermé de $E \oplus F$. Par a) l'image de $1 + T^*T$ est fermée, donc (i) $\Rightarrow$ (ii).

L'orthogonal de $G(T)$ étant $U_0G(T^*)$, la propriété (iv) équivaut à l'égalité $G(T) + U_0G(T^*) = E \oplus F$. Si (iii) est satisfaite, $\{\,(x,0)\,,\ x \in E\,\} \subset G(T) + U_0G(T^*)$ et par a) (ii) est satisfaite et de même (iii) est satisfaite. Inversement, si (ii) (*resp.* (iii)) est satisfaite, alors $(E \oplus \{0\}) + G(T^*) =$

$E\oplus \mathrm{dom}T^* \subset G(T)+U_0G(T^*)$ (*resp.* $\mathrm{dom}T\oplus F \subset G(T)+U_0G(T^*)$) et pusique $G(T)+U_0G(T^*)$ est fermé, (iv) est vérifié.

Enfin, si la condition (iv) est satisfaite, $G(T)$ est l'orthogonal de $U_0G(T^*)$; il en résulte immédiatement que $(T^*)^* = T$. □

14.12 Définition. Soient A une C^*-algèbre, E et F des A-modules hilbertiens. Un opérateur de E dans F est dit *régulier* s'il est densément défini ainsi que son adjoint et si son graphe est un sous-module orthocomplémenté du A-module hilbertien $E\oplus F$.

Tout sous-module orthocomplémenté d'un module hilbertien est fermé, donc tout opérateur régulier est fermé.

14.13 Lemme. *Soient A une C^*-algèbre, E et F des A-modules hilbertiens et T un opérateur de E dans F densément défini ainsi que son adjoint et fermé. Pour que T soit régulier il faut et il suffit qu'il existe un A-module hilbertien H et un morphisme $R\in \mathrm{Mor}(H,E)$ tel que $\mathrm{dom}\,T = \mathrm{im}\,R$ et $TR\in\mathrm{Mor}(H,F)$.*

Démonstration. Supposons T régulier et posons $H = G(T)$. L'inclusion de $G(T)$ dans $E\oplus F$ définit un élément $u\in \mathrm{Mor}(H,E\oplus F)$ par le corollaire 13.19.a). Notons $p\in\mathrm{Mor}(E\oplus F,E)$ et $q\in\mathrm{Mor}(E\oplus F,F)$ les projections et posons $R = pu$; alors $\mathrm{im}\,R = \mathrm{dom}\,T$ et $TR = qu \in \mathrm{Mor}(H,F)$).

Réciproquement, supposons l'existence d'un tel R et notons $w\in\mathrm{Mor}(H,E\oplus F)$ le morphisme $x\mapsto (Rx,TRx)$. Il est clair que $\mathrm{im}\,w = G(T)$ et comme par hypothèse ce sous-module de $E\oplus F$ est fermé, il est orthocomplémenté par la prop. 13.21. □

14.14 Proposition. *Soient A une C^*-algèbre, E, F et H des A-modules hilbertiens.*

a) Soient $S\in\mathrm{Mor}(E,F)$ et T un opérateur régulier de E dans F. L'opérateur $S+T$ est régulier.

b) Soient T un opérateur régulier de E dans F et $S\in\mathrm{Mor}(F,H)$ un morphisme inversible. L'opérateur ST est régulier.

c) Soient $T\in\mathrm{Mor}(E,F)$ un morphisme inversible et S un opérateur régulier de F dans H. L'opérateur ST est régulier.

Démonstration. Sous les hypothèses de a) et b), soient G un A-module hilbertien et $R\in\mathrm{Mor}(G,E)$ tel que $\mathrm{im}\,R = \mathrm{dom}\,T$ et $TR\in\mathrm{Mor}(G,F)$ (lemme 14.13).

a) On a $\mathrm{im}\,R = \mathrm{dom}\,S+T$ et $(S+T)R = SR+TR\in\mathrm{Mor}(G,F)$. Par la prop. 14.6.a), l'opérateur $S+T$ est fermé. Par la prop. 14.10.a), le domaine de son adjoint est dense ; l'opérateur $S+T$ est donc régulier par le lemme 14.13.

b) On a $\mathrm{im}\,R = \mathrm{dom}\,ST$ et $(ST)R = S(TR)\in\mathrm{Mor}(G,H)$. Par la prop. 14.6.c), l'opérateur ST est fermé. Par la prop. 14.10.c), son adjoint est T^*S^*, dont le domaine est l'image par le morphisme $(S^*)^{-1}$ de celui de T^* ; il est donc dense dans H ; l'opérateur ST est donc régulier par le lemme 14.13.

c) Par la prop. 14.10.c), on a $(ST)^* = T^*S^*$. Par le lemme 14.11.b), S^* est un opérateur régulier. Par b) T^*S^* est régulier. Donc son adjoint, égal à $(S^*)^*T$ (prop. 14.10.c) donc à ST (lemme 14.11.b) est régulier (lemme 14.11.b). □

14.15 Proposition. *Soient A une C^*-algèbre, E et F des A-modules hilbertiens et T un opérateur régulier de E dans F.*

a) Si $\mathrm{dom}\,T = E$ alors $T\in\mathrm{Mor}(E,F)$.

b) Si les images de T et T^* sont denses dans F et E respectivement, alors T^{-1} est un opérateur régulier de F dans E.

c) Si T est bijectif de $\operatorname{dom} T$ *sur F alors $T^{-1} \in \operatorname{Mor}(F, E)$.*

d) Si $E = F$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C} - \operatorname{Sp} T$, $R_\lambda(T) \in \operatorname{Mor}(E)$.

Démonstration. a) Si T est un opérateur partout défini et son graphe est orthocomplémenté, alors $T \in \operatorname{Mor}(E, F)$ par le corollaire 13.19.b).

b) Comme $\ker T$ (*resp.* $\ker T^*$) est l'orthogonal de $\operatorname{im} T^*$ (*resp.* de $\operatorname{im} T$), T (*resp.* T^*) est injectif. Comme le graphe de T^{-1} se déduit de celui de T par la symétrie $(x, y) \mapsto (y, x)$, il est orthocomplémenté. Comme les domaines de T^{-1} et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ sont denses, T est régulier.

c) Sous les hypothèses de c), T^{-1} est un opérateur partout défini et son graphe est orthocomplémenté, donc $T^{-1} \in \operatorname{Mor}(F, E)$ par le corollaire 13.19.b).

d) résulte immédiatement de c) et de la prop. 14.14.a). □

14.2.3 Transformation de Woronowicz

14.16 Proposition. *Soient A une C^*-algèbre, E et F des A-modules hilbertiens et T un opérateur régulier de E dans F. Notons G le graphe de T, $p : G \to E$ et $q : G \to F$ les projections.*

a) -1 est une valeur régulière de T^*T et $(1 + T^*T)^{-1} = pp^*$.

b) Le domaine de T^*T est un domaine essentiel pour T.

c) L'opérateur T^*T est autoadjoint régulier et $\operatorname{Sp} T^*T \subset \mathbb{R}_+$.

Démonstration. a) Pour $x \in \operatorname{dom} 1 + T^*T$, on a $\langle x, (1 + T^*T)x\rangle = \langle x, x\rangle + \langle Tx, Tx\rangle$ de sorte que $\|(1 + T^*T)x\| \geqslant \|x\|$, donc $1 + T^*T$ est injectif. Soit $x \in E$; comme $E \oplus F = G \oplus G^\perp$, il existe $z \in \operatorname{dom} T$ et $y \in \operatorname{dom} T^*$ tels que $(x, 0) = (z, Tz) + (T^*y, -y)$, *i.e.* $y = Tz$ et $x = (1 + T^*T)z$. Donc, $1 + T^*T$ est bijectif et $(1 + T^*T)^{-1}(x) = z$. Remarquons que (z, Tz) est la projection orthogonale de $(x, 0)$ dans G, *i.e.* $(z, Tz) = p^*x$. Enfin, $z = p(z, Tz) = pp^*x$.

b) Soient $x \in \operatorname{dom} T$ et $\varepsilon > 0$. Soit $y \in \operatorname{dom} T^*$ tel que $\|Tx - y\| < \varepsilon$. Posons $z = (1 + T^*T)^{-1}(x + T^*y)$. Comme $(x, y) = (z, Tz) + (T^*(Tz - y), y - Tz)$, le projeté orthogonal de (x, y) dans $G(T)$ est (z, Tz), de sorte que $\|(z, Tz) - (x, y)\| < \varepsilon$, d'où b).

c) Comme le domaine de T^*T est un domaine essentiel pour T, il est en particulier dense dans E. Il en résulte que $\operatorname{dom} T^*T = \operatorname{dom} 1 + T^*T = \operatorname{im}(1 + T^*T)^{-1}$ est dense ; comme $(1 + T^*T)^{-1} \in \operatorname{Mor}(E)$ est hermitien, par la prop. 14.15.b) $1 + T^*T$ est régulier et par la prop 14.10.b), il est autoadjoint. Il résulte alors des prop. 14.10.a) et 14.14.a) que T^*T possède les mêmes propriétés. Comme $(1 + T^*T)^{-1} \in \operatorname{Mor}(E)_+$ et $\|(1 + T^*T)^{-1}\| \leqslant 1$, $\operatorname{Sp}(1 + T^*T)^{-1} \subset [0, 1]$, de sorte que le spectre de $1 + T^*T$ est inclus dans $[1, +\infty[$ par le lemme 14.8 et $\operatorname{Sp} T^*T \subset \mathbb{R}_+$. □

14.17 Proposition. *Soient A une C^*-algèbre, E et F des A-modules hilbertiens et T un opérateur régulier de E dans F. Notons G le graphe de T, $e, g \in \operatorname{Mor}(E \oplus F)$ les projecteurs orthogonaux d'image E et G respectivement.*

a) L'image du morphisme $e + g - 1$ est dense dans $E \oplus F$.

b) Le morphisme $e + g - 1$ admet une décomposition polaire $e + g - 1 = w|e + g - 1|$, où w est un morphisme unitaire de carré 1 de $\operatorname{Mor}(E \oplus F)$.

c) On a $\operatorname{dom} T = \operatorname{im}(1 + T^*T)^{-1/2}$ et $T(1 + T^*T)^{-1/2}\operatorname{Mor}(E, F)$ où on a posé $(1 + T^*T)^{-1/2} = ((1 + T^*T)^{-1})^{1/2} (= |p^*|)$.

d) On a $wE = G$; la matrice de w est

$$w = \begin{pmatrix} (1+T^*T)^{-1/2} & T^*(1+TT^*)^{-1/2} \\ T(1+T^*T)^{-1/2} & -(1+TT^*)^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Démonstration. a) On a $\operatorname{im} eg = eG = \operatorname{dom} T$ et $(1-e)(1-g)(E \oplus F) = (1-e)G^\perp = \operatorname{dom} T^*$. Par la prop. 13.27.a), le morphisme hermitien $e+g-1$ a une image dense.

b) découle du corollaire 13.24.

c) Nous avons vu dans la démonstration de la prop 13.27.b) que w est l'unique morphisme unitaire $w \in \operatorname{Mor}(E+F)$ tel que $wE = G$ et $ewe - (1-e)w(1-e) = |e+g-1|$. Or $(e+g-1)^2 = ege + (1-e)(1-g)(1-e)$. Il s'ensuit que $(ewe)^2 = ege$ et sa restriction comme élément de $\operatorname{Mor}(E)$ est $(1+T^*T) = pp^*$, vu que, pour $x \in E$, on a $pp^*x = egx = egex$; de sorte que la restriction de ewe comme élément de $\operatorname{Mor}(E)$ est $(1+T^*T)^{-1/2} = ((1+T^*T)^{-1})^{1/2}$. On a $\operatorname{dom} T = eG = ewE = \operatorname{im} ewe = \operatorname{im}(1+T^*T)^{-1/2}$. Pour $x \in E$, $wx \in G$, donc $ewx \in \operatorname{dom} T$ et $(1-e)wx = Tewx$, donc $\operatorname{im}(1+T^*T)^{-1/2} \subset \operatorname{dom} T$ et la restriction de $(1-e)we$ comme élément de $\operatorname{Mor}(E,F)$ est $T(1+T^*T)^{-1/2}$. En particulier $T(1+T^*T)^{-1/2} \in \operatorname{Mor}(E,F)$.

d) Notons $W \in \operatorname{Mor}(E \oplus F)$ le morphisme donné par la matrice

$$W = \begin{pmatrix} (1+T^*T)^{-1/2} & T^*(1+TT^*)^{-1/2} \\ T(1+T^*T)^{-1/2} & -(1+TT^*)^{-1/2} \end{pmatrix}$$

Par ce qui précède, la restriction de W à E coïncide avec celle de w donc $WE = G(T)$; appliquant cela à T^* on en déduit que la restriction de W à F est un unitaire de F sur $U_0G(T^*) = G(T)^\perp$, donc W est unitaire. Il résulte alors de la prop. 13.27.b) que $W = w$. □

14.18 Lemme. *Soient A une C^*-algèbre, E et F les A-modules hilbertiens et $Q \in \operatorname{Mor}(E,F)$ tel que $\|Q\| \leqslant 1$.*

a) Soit $S \in \operatorname{Mor}(E)_+$ tel que $\|S\| \leqslant 1$. L'adhérence de l'image de $1-S$ est $\{\, x \in E\,,\ \lim S^n x = 0 \,\}$.

b) Pour $Q \in \operatorname{Mor}(E,F)$ tel que $\|Q\| \leqslant 1$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) L'image de $1 - Q^*Q$ est dense dans E.

(ii) La suite $(Q^*Q)^n$ converge fortement vers 0 dans $\operatorname{Mor}(E)$.

(iii) La suite $(QQ^*)^n$ converge fortement vers 0 dans $\operatorname{Mor}(F)$.

(iv) L'image de $1 - QQ^*$ est dense dans F.

Démonstration. a) Comme la suite de fonctions $t \mapsto t^n - t^{n+1}$ converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$, on a $\lim S^n(1-S) = 0$. Pour tout $x \in \operatorname{im}(1-S)$, on a donc $\lim S^n x = 0$. Comme la suite S^n est bornée, l'ensemble $\{\, x \in E\,,\ \lim S^n x = 0 \,\}$ est fermé donc contient l'adhérence de $\operatorname{im} 1-S$.

Par ailleurs, pour tout $x \in E\,,\ x - S^n x \in \operatorname{im} 1-S$. Si $\lim S^n x = 0\,,\ x$ est adhérent à $\operatorname{im} 1-S$.

b) Par a) appliqué à Q^*Q et à QQ^* on trouve (i) $\iff$ (ii) et (iii) $\iff$ (iv). Si (ii) est satisfait, pour tout $y \in F$ et tout $n \geqslant 1$ on a $(QQ^*)^n y = Q(Q^*Q)^{n-1}Q^*y$; donc $\lim (QQ^*)^n y = 0$. Donc (ii) $\Rightarrow$ (iii). Enfin (iii) $\Rightarrow$ (ii) en résulte, en remplaçant Q par son adjoint. □

Soit A une C^*-algèbre. Si E et F sont des A-modules hilbertiens et T un opérateur régulier de E dans F on posera $Q(T) = T(1+T^*T)^{-1/2}$.

14.19 Théorème. *Soient A une C^*-algèbre et E et F des A-modules hilbertiens.*

a) On a $1 - Q(T)^*Q(T) = (1+T^*T)^{-1}$ *et* $Q(T^*) = Q(T)^*$.

b) La correspondance $T \mapsto Q(T)$ *est une bijection entre l'ensemble des opérateurs fermés réguliers de* E *dans* F *et opérateurs* $Q \in \mathrm{Mor}(E,F)$ *tels que* $\|Q\| \leqslant 1$ *et que l'image de* $(1 - Q^*Q)$ *soit dense dans* E*. L'application réciproque est* $Q \mapsto Q((1-Q^*Q)^{1/2})^{-1}$.

Démonstration. a) Reprenons les notations de la prop. 14.17. Comme $w = w^*$, on a $Q(T^*) = Q(T)^*$; comme $w^2 = 1$, on trouve $Q(T^*)Q(T) + (1+T^*T)^{-1} = 1$.

b) Si T est un opérateur régulier, $Q(T)$ vérifie les conditions requises. Remarquons de plus que $T = Q(T)((1+T^*T))^{-1/2})^{-1} = Q(T)((1-Q(T)^*Q(T))^{1/2})^{-1}$, l'application $T \mapsto Q(T)$ est injective

Soit $Q \in \mathrm{Mor}(E,F)$ un morphisme tel que $\|Q\| \leqslant 1$ et que l'image de $(1-Q^*Q)$ soit dense dans E. Comme $(1-Q^*Q)^{1/2}$ est hermitien, son noyau est égal à l'orthogonal de son image. Il résulte alors du lemme 14.18, que les morphismes $(1-Q^*Q)^{1/2}$ et $(1-QQ^*)^{1/2}$ sont injectifs d'image dense.

Soit W le morphisme de $E \oplus F$ de matrice $\begin{pmatrix} (1-Q^*Q)^{1/2} & Q^* \\ Q & -(1-QQ^*)^{1/2} \end{pmatrix}$; on a $W = W^*$ et, par la remarque 13.15, W^2 est l'identité. Donc WE et WF sont des sous-espaces orthogonaux supplémentaires de $E \oplus F$.

Comme la restriction de eW à E est le morphisme injectif d'image dense $(1-Q^*Q)^{1/2}$, on en déduit que WE est le graphe d'un opérateur densément défini T. Comme l'orthogonal du graphe de T est WF, le graphe de T^* est $\{\, ((1-QQ^*)^{1/2}y, Q^*y)\,,\ y \in F \,\}$ et donc T^* est densément défini. Il est clair que T est régulier. Enfin W vérifie les conditions de la prop. 13.27.b), donc W est égal au w de la prop. 14.17, donc $Q = Q(T)$. $\square$

Remarques. — Soient A une C^*-algèbre, E et F des A-modules hilbertiens et T un opérateur régulier de E dans F.

a) Il découle immédiatement de la définition de $Q(T)$ que T et $Q(T)$ ont même image. En particulier, si l'image de T est fermée, elle est orthocomplémentée (prop. 13.21). De plus, comme T^* et $Q(T)^*$ ont même image, T et $Q(T)$ ont même noyau. Il en résulte que T est bijectif si et seulement si $Q(T)$ est bijectif. Si $E = F$, $0 \in \mathrm{Sp}\, T \iff 0 \in \mathrm{Sp}\, Q(T)$.

b) Supposons que $E = F$; il découle immédiatement du théorème 14.19, que T est autoadjoint si et seulement si $Q(T)$ soit hermitien.

c) Par le théorème 14.19.b), il existe un opérateur régulier $|T|$ de E dans E tel que $Q(|T|) = |Q(T)|$. Cet opérateur est autoadjoint et comme $(|T|^2+1)^{-1} = 1 - Q(|T|)^*Q(|T|)$ on en déduit que $|T|^2 = T^*T$. Le domaine de $|T|$ est l'image de $(1-Q(|T|)^2)^{1/2}$; il est donc égal à celui de T. Soit $x \in \mathrm{dom}\, T$; écrivons $x = (1+T^*T)^{-1/2}y$ avec $y \in E$. On a $\langle x, |T|x\rangle = \langle (1+T^*T)^{-1/2}y, Q(|T|)y\rangle = \langle y, (1-Q(|T|)^2)^{1/2}Q(|T|)y\rangle$ car le morphisme $(1-Q(|T|)^2)^{1/2}Q(|T|)$ est positif.

Les adhérences de $\mathrm{im}\, T^* = \mathrm{im}\, Q(T^*)$ et $\mathrm{im}\, |T| = \mathrm{im}\, Q(|T|)$ coïncident (lemme 13.20.a). Donc, si les adhérences des images de T et de T^* sont orthocomplémentées dans F et E respectivement, $Q(T)$ admet une décomposition polaire $Q(T) = uQ(|T|)$ ce qui donne immédiatement $T = u|T|$.

14.20 Exemple. Soit X un espace localement compact. Soit $f \in C(X)$. Notons $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application $z \mapsto z(1+|z|^2)^{-1/2}$. Soit $Q_f \in \mathrm{Mor}(C_0(X))$ l'opérateur de multiplication par la fonction $q \circ f$. Alors $1 - Q_f^*Q_f$ est l'opérateur de multiplication par la fonction $(1+|f|^2)^{-1}$ et il est clair que l'image de $1 - Q_f^*Q_f = 1 - Q_fQ_f^*$ est dense. Notons M_f l'opérateur du $C_0(X)$-module $C_0(X)$ tel que $Q(M_f) = Q_f$. C'est l'opérateur de multiplication par f *i.e.* son graphe est $G(M_f) = \{\, (g,h) \in C_0(X) \oplus C_0(X)\,,\ h = gf \,\}$. Remarquons que $M_f^* = M_{\overline{f}}$.

Soit u_i une unité approchée de $C_0(X)$ formée d'éléments de $C_c(X)$. Pour tout $g \in \operatorname{dom} M_f$, (gu_i, fgu_i) converge vers (g, fg), donc $C_c(X)$ est un domaine essentiel pour M_f.

Soit T un opérateur $C_0(X)$-linéaire et densément défini de $C_0(X)$ dans lui même. Alors $\operatorname{dom} T$ est un idéal dense dans $C_0(X)$, donc, pour tout $x \in X$, $\operatorname{dom} T \not\subset \{ f \in C_0(X),\ f(x) = 0 \}$; soient $x \in X$ et $f, g \in \operatorname{dom} T$ telles que $f(x) = 0$ et $g(x) \neq 0$; alors $(Tf)g = T(fg) = T(g)f$, donc $(Tf)(x) = 0$; il s'ensuit qu'il existe une unique fonction $\varphi : X \to \mathbb{C}$ telle que, pour tout $f \in \operatorname{dom} T$ et tout $x \in X$, on ait $(Tf)(x) = f(x)\varphi(x)$; comme Tf est continue, φ est continue sur $U_f = \{ x \in X,\ f(x) \neq 0 \}$; or les ensembles U_f forment un recouvrement ouvert de X, donc $\varphi \in C(X)$ et $T \subset M_\varphi$.

Soit $f \in C_c(X)$; il existe une partie finie J de $\operatorname{dom} T$ telle que le support de f soit contenu dans $\bigcup_{g \in J} U_g \supset K$; alors g est contenu dans l'idéal engendré par J, donc $C_c(X) \subset \operatorname{dom} T$. Comme $C_c(X)$ est un domaine essentiel pour M_φ, $\overline{T} = M_\varphi$.

Pour $f, g \in C(X)$, on a $M_f + M_g \subset M_{f+g}$ et $M_f M_g \subset M_{fg}$; comme $C_c(X)$ est un domaine essentiel de chacun de ces opérateurs, on a $\overline{M_f + M_g} = M_{f+g}$ et $\overline{M_f M_g} = M_{fg}$.

Enfin, $0 \in \operatorname{Sp} M_f \iff O \in \operatorname{Sp} Q(M_f) = \overline{q(f(X)} \iff 0 \in \overline{f(x)}$. Il en résulte que $\operatorname{Sp} M_f = \overline{f(X)}$.

Pour $f \in C(X)$, l'opérateur régulier M_f se note simplement f. L'ensemble des opérateurs réguliers du $C_0(X)$-module hilbertien $C_0(X)$ dans lui même est donc $C(X)$.

14.3 Opérateurs réguliers normaux et calcul fonctionnel continu

14.3.1 Opérateurs normaux

Soient A une C^*-algèbre. Un opérateur régulier T d'un A-module hilbertien dans lui même est dit mormal si $TT^* = T^*T$.

14.21 Proposition. *Un opérateur régulier T d'un A-module hilbertien E dans lui même est normal si et seulement si $Q(T) = T(1 + T^*T)^{-1/2}$ est un élément normal de la C^*-algèbre* $\operatorname{Mor}(E)$.

Démonstration. Par le théorème 14.19.a), on a $1 - Q(T)^*Q(T) = (1 + T^*T)^{-1}$ et $1 - Q(T)Q(T)^* = (1 + TT^*)^{-1}$ d'où le résultat. □

14.22 Corollaire. *Soit T un opérateur régulier normal d'un A-module hilbertien E dans lui même d'image dense. Alors T^{-1} est un opérateur régulier normal.*

Démonstration. Comme l'image de T est celle de $Q(T)$, l'image de $Q(T)^*Q(T) = Q(T)Q(T)^*$ est dense par le lemme 13.20.a), donc l'image de T^*, qui coïncide avec celle de $Q(T)^*$, est dense. Par la prop. 14.15.b), T^{-1} est régulier et $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$. Comme $TT^* = T^*T$, leurs inverses sont égaux *i.e.* $(T^*)^{-1}T^{-1} = T^{-1}(T^*)^{-1}$, donc T^{-1} est normal. □

14.23 Lemme. *Le domaine d'un opérateur régulier normal d'un A-module hilbertien E dans lui même coïncide avec celui de son adjoint. Si S et T sont des opérateurs normaux tels que $S \subset T$, alors $S = T$.*

Démonstration. Soit T un opérateur régulier normal d'un A-module hilbertien E dans lui même. On a $\operatorname{dom} T^* = \operatorname{im} (1 + TT^*)^{-1/2} = \operatorname{dom} T$. Si $S \subset T$, alors $T^* \subset S^*$, donc $\operatorname{dom} T = \operatorname{dom} T^* \subset \operatorname{dom} S^* = \operatorname{dom} S$. □

14.3.2 Image d'un opérateur régulier par composition de modules hilbertiens

14.24 Proposition. *Soient A et B des C^*-algèbres, E et F des A-modules hilbertiens, H un B-module hilbertien $\pi : A \to \mathrm{Mor}(H)$ une représentation et T un opérateur régulier de E dans F. Il existe un opérateur T_0 de $E \otimes_\pi H$ dans $F \otimes_\pi H$ dont le domaine est l'image dans $E \otimes_\pi H$ du produit tensoriel algébrique de $\mathrm{dom}\, T$ par H et tel que pour tout $x \in \mathrm{dom}\, T$ et tout $y \in H$ on ait $T_0(x \otimes y) = Tx \otimes y$. L'opérateur T_0 ainsi défini est fermable et sa fermeture est un opérateur régulier noté $T \otimes_\pi 1$. On a $Q(T) \otimes_\pi 1 = Q(T \otimes_\pi 1)$.*

Démonstration. Notons G le graphe de T, $e, g \in \mathrm{Mor}(E \oplus F)$ les projecteurs orthogonaux d'image E et G respectivement. L'image du morphisme $(e + g - 1) \otimes_\pi 1 \in \mathrm{Mor}((E \oplus F) \otimes_\pi H)$ contient l'image du produit tensoriel algébrique de $\mathrm{im}\, e + g - 1$ par H donc est dense dans $(E \oplus F) \otimes_\pi H = (E \otimes_\pi H) \oplus (F \otimes_\pi H)$. Posons $\tilde{G} = (g \otimes_\pi 1)((E \otimes_\pi H) \oplus (F \otimes_\pi H))$. Par la prop. 13.27.a), $\tilde{G}$ est le graphe d'un opérateur densément défini (son domaine est $(e \otimes_\pi 1)(\tilde{G})$) ainsi que son adjoint (dont le domaine est $(1 - (e \otimes_\pi 1))(\tilde{G}^\perp)$) régulier de $E \otimes_\pi H$ dans $F \otimes_\pi H$, que l'on note $T \otimes_\pi 1$.

La décomposition polaire de $(e + g - 1) \otimes_\pi 1$ est $(w \otimes_\pi 1)(|e + g - 1| \otimes_\pi 1)$, d'où il ressort que $Q(T) \otimes_\pi 1 = Q(T \otimes_\pi 1)$.

Remarquons que $\tilde{G} = (w \otimes_\pi 1)(E \otimes_\pi 1)$ est l'adhérence de l'image dans $(E \oplus F) \otimes_\pi 1$ du produit tensoriel algébrique de wE par H, *i.e.* du graphe de T_0. Donc $\overline{T_0} = T \otimes_\pi 1$. □

14.25 Proposition. *Soient A et B des C^*-algèbres, E et F des A-modules hilbertiens, H un B-module hilbertien, $\pi : A \to \mathrm{Mor}(H)$ une représentation et T un opérateur régulier de E dans F.*

a) Si T est normal ou autoadjoint, il en va de même pour $T \otimes_\pi 1$.

b) On a $(T \otimes_\pi 1)^* = T^* \otimes_\pi 1$ et $(T \otimes_\pi 1)^*(T \otimes_\pi 1) = (T^*T \otimes_\pi 1)$.

c) Si $D \subset \mathrm{dom}\, T$ est un domaine essentiel pour T, l'image dans $E \otimes_\pi H$ du produit tensoriel algébrique de D par H est un domaine essentiel pour $T \otimes_\pi 1$.

d) Pour tout opérateur régulier T de E dans E on a $\mathrm{Sp}\,(T \otimes_\pi 1) \subset \mathrm{Sp}\, T$, avec égalité si π est injective.

Démonstration. a) Pour que T soit normal ou autoadjoint, il faut et il suffit que $Q(T)$ possède la même propriété, donc a) découle de la prop. 14.24.

b) Par la prop. 14.24 et le théorème 14.19.a), on a $Q(T^* \otimes_\pi 1) = Q(T^*) \otimes_\pi 1 = Q(T)^* \otimes_\pi 1 = (Q(T) \otimes_\pi 1)^* = (Q(T \otimes_\pi 1))^* = Q((T \otimes_\pi 1)^*)$.

c) Comme $G(T|D)$ est dense dans $G(T)$, l'image dans $(E \oplus F) \otimes_\pi H$ du produit tensoriel algébrique de $G(T|D)$ par H a la même adhérence que l'image dans $(E \oplus F) \otimes_\pi H$ du produit tensoriel algébrique de $G(T)$ par H *i.e.* $G(T \otimes_\pi 1)$.

d) Comme $0 \in \mathrm{Sp}\, T \iff 0 \in \mathrm{Sp}\, Q(T)$, on se ramène au cas où $T \in \mathrm{Mor}(E)$. Comme $T \mapsto T \otimes_\pi 1$ est un morphisme d'algèbres, $\mathrm{Sp}\,(T \otimes_\pi 1) \subset \mathrm{Sp}\, T$. Si π est injectif et $S \in \mathrm{Mor}(E)$ n'est pas nul, il existe $x \in E$ tel que $Sx \neq 0$; alors $\langle Sx, Sx\rangle \neq 0$, donc $\pi(\langle Sx, Sx\rangle) \neq 0$; il existe donc $y, z \in H$ tels que $\langle z, \pi(\langle Sx, Sx\rangle)y\rangle \neq 0$, donc $(S \otimes_\pi 1)(x \otimes y) \neq 0$. L'homomorphisme de C^*-algèbres $S \mapsto S \otimes_\pi 1$ est injectif donc préserve le spectre. □

14.3.3 Calcul fonctionnel continu

Soient A et B des C^*-algèbres, H un B-module hilbertien et $\pi : A \to \mathrm{Mor}(H)$ une représentation non dégénérée. Notons $\overline{\pi} : \mathcal{M}(A) \to \mathrm{Mor}(H)$ l'extension de π aux multiplicateurs. Le B-module hilbertien

$A\otimes_\pi H$ s'identifie à H au moyen de l'opérateur unitaire $a\otimes x\mapsto \pi(a)x$. Pour $T\in\mathcal{M}(A)=\mathrm{Mor}(A)$ on a, à travers cette identification, $\overline{\pi}(T)=T\otimes_\pi 1$ (exemple p. 86). Si T est un opérateur régulier du A-module hilbertien A dans lui même, on note $\tilde\pi(T)$ l'opérateur régulier $T\otimes_\pi 1$ du B-module hilbertien H dans lui même. Remarquons que le domaine de $\tilde\pi(T)$ est l'image de $\overline{\pi}((1+T^*T)^{-1/2})$, *i.e.* (par le théorème de Cohen), $\mathrm{dom}\,\tilde\pi(T)=\{\,\overline{\pi}((1+T^*T)^{-1/2})\pi(a)x\,,\ a\in A\,,\ x\in H\,\}=\{\,\pi(a)x\,,\ a\in\mathrm{dom}\,T\,,\ x\in H\,\}$. Pour $a\in\mathrm{dom}\,T$ et $x\in H$ on a $\tilde\pi(T)\pi(a)x=\pi(Ta)x$.

14.26 Théorème. *Soient A une C^*-algèbre, E un A-module hilbertien, X un espace localement compact et $\pi: C_0(X)\to\mathrm{Mor}(E)$ une représentation non dégénérée. Notons $\overline{\pi}: C_b(X)\to\mathrm{Mor}(E)$ son extension aux multiplicateurs et $\tilde\pi$ l'application de $C(X)$ dans l'ensemble des opérateurs réguliers de E dans E définie ci-dessus.*

- *a) Pour tout $f\in C(X)$, $\tilde\pi(f)$ est normal, $\tilde\pi(\overline{f})=\tilde\pi(f)^*$, $Q(\tilde\pi(f))=\overline{\pi}(f(1+|f|^2)^{-1/2}$ et $\mathrm{Sp}\,\tilde\pi(f)\subset\overline{f(X)}$, avec égalité si π est injective.*
- *b) Pour tout $g\in C_c(X)$ on a $\tilde\pi(f)\pi(g)=\pi(fg)$; l'ensemble $\{\,\pi(g)x\,,\ g\in C_c(X)\,,\ x\in E\,\}$ est un domaine essentiel pour $\tilde\pi(f)$.*
- *c) Pour $f\in C_b(X)$, $\tilde\pi(f)=\overline{\pi}(f)$.*
- *d) Si T est un opérateur régulier normal de E dans E tel que, pour tout $g\in C_c(X)$ on ait $T\pi(g)=\pi(fg)$, alors $T=\tilde\pi(f)$.*
- *e) Pour tout $f,g\in C(X)$, on a $\tilde\pi(f+g)=\overline{\tilde\pi(f)+\tilde\pi(g)}$ et $\tilde\pi(fg)=\overline{\tilde\pi(f)\tilde\pi(g)}$. Si $g(|f+g|+1)^{-1}$ est bornée sur X, alors $\tilde\pi(f+g)=\tilde\pi(f)+\tilde\pi(g)$; si $g(|fg|+1)^{-1}$ est bornée sur X, alors $\tilde\pi(fg)=\tilde\pi(f)\tilde\pi(g)$.*

Démonstration. a) et b) découlent de la définition de $\tilde\pi$ et des prop. 14.24 et 14.25.

Posons $D=\{\,\pi(g)x\,,\ g\in C_c(X)\,,\ x\in E\,\}$.

Comme D est un domaine essentiel de $\tilde\pi(f)$, tout opérateur fermé qui prolonge $\tilde\pi(f)|D$ prolonge $\tilde\pi(f)$. Donc d) découle du lemme 14.23 et c) s'en déduit.

Pour $x\in D$, on a $(\tilde\pi(f)+\tilde\pi(g))x=\tilde\pi(f+g)x$ et $\tilde\pi(f)\tilde\pi(g)x=\tilde\pi(fg)x$. Il en résulte que $\tilde\pi(f+g)\subset\overline{\tilde\pi(f)+\tilde\pi(g)}$ et $\tilde\pi(fg)\subset\overline{\tilde\pi(f)\tilde\pi(g)}$. Comme $\tilde\pi(f)^*+\tilde\pi(g)^*\subset(\tilde\pi(f)+\tilde\pi(g))^*$ et $\tilde\pi(g)^*\tilde\pi(f)^*\subset(\tilde\pi(f)\tilde\pi(g))^*$, on en déduit que $\tilde\pi(f+g)^*=\tilde\pi(\overline{f}+\overline{g})\subset(\tilde\pi(f)+\tilde\pi(g))^*$ et $\tilde\pi(fg)^*=\tilde\pi(\overline{g}\overline{f})\subset(\tilde\pi(f)\tilde\pi(g))^*$, donc $\overline{\tilde\pi(f)+\tilde\pi(g)}\subset(\tilde\pi(f+g)^*)^*=\tilde\pi(f+g)$ et $\overline{\tilde\pi(f)\tilde\pi(g)}\subset(\tilde\pi(fg)^*)^*=\tilde\pi(fg)$.

Posons $h=f+g$ (*resp.* $h=fg$). Si $g(1+|h|)^{-1}$ est bornée, notons $u\in\mathrm{Mor}(E\oplus E,E)$ l'application $(x,y)\mapsto\overline{\pi}(\dfrac{g}{1+|h|^2})x+\overline{\pi}(\dfrac{g\overline{h}}{1+|h|^2})y$. Pour $(x,y)\in G(\tilde\pi(h))$, $(x,u(x,y))\in G(\tilde\pi(g))$. Il résulte du lemme 14.5. a) (*resp.* b), que $\tilde\pi(f)+\tilde\pi(g)$ (*resp.* $\tilde\pi(f)\tilde\pi(g)$) est fermé. □

14.27 Exemple. Soient X et Y des espaces localement compacts et $\varphi: Y\to X$ une application continue. Notons $\psi: C_0(X)\to\mathrm{Mor}(C_0(Y))=C_b(Y)$ l'application $f\mapsto f\circ\varphi$. Soit $h\in C_c(Y)$; comme l'image par φ du support de h est compacte, il existe $f\in C_0(X)$ telle que $(f\circ\varphi)h=h$, donc le $C_0(X)$-module $C_0(Y)$ est non dégénéré. Pour $f\in C(X)$ et $g\in C_c(X)$ on a $\pi(fg)=(fg)\circ\varphi=(f\circ\varphi)(g\circ\varphi)$, d'où l'on déduit que $\tilde\psi(f)=f\circ\varphi$.

Soient A une C^*-algèbre, E un A-module hilbertien et $\pi: C_0(Y)\to\mathrm{Mor}(E)$ une représentation non dégénérée; notons $\overline{\pi}: C_b(Y)\to\mathrm{Mor}(E)$ son extension aux multiplicateurs. Pour $f\in C(X)$ et $g\in C_c(X)$, on a $\overline{\pi}(\psi(fg))=\overline{\pi}((f\circ\varphi)(g\circ\varphi)=\tilde\pi(f\circ\varphi)\overline{\pi}(g\circ\varphi)$. Donc $\widetilde{\overline{\pi}\circ\psi}(f)=\tilde\pi(f\circ\varphi)$.

14.28 Proposition. *Soient A une C^*-algèbre, E un A-module hilbertien, T un opérateur régulier normal de E dans lui même et X une partie fermée de $\mathbb{C}$ contenant $\mathrm{Sp}\,T$. Notons $z\in C(X)$ la fonction $\lambda\mapsto\lambda$. Il existe une unique représentation non dégénérée $\pi: C_0(X)\to\mathrm{Mor}(E)$ telle que $\tilde\pi(z)=T$. Le noyau de π est l'ensemble des $f\in C_0(X)$ nulles sur $\mathrm{Sp}\,T$.*

Démonstration. Soit $\pi : C_0(X) \to \mathrm{Mor}(E)$ une représentation non dégénérée ; notons $\overline{\pi} : C_b(X) \to \mathrm{Mor}(E)$ son extension aux multiplicateurs. Notons $q = Q(z) \in C_b(X)$ l'application $\lambda \mapsto \lambda(1+|\lambda|^2)^{-1/2}$. Par les théorèmes 14.19 et 14.26, pour que $T = \tilde{\pi}(z)$, il faut et il suffit que $Q(T) = \overline{\pi}(q)$.

Notons D le disque unité de $\mathbb{C}$. Soit $\varphi : C_0(\mathbb{C}) \to C(D)$ l'homomorphisme tel que pour tout $f \in C_0(\mathbb{C})$ et $\lambda \in D$, on ait $(\varphi(f))(\lambda) = f(\lambda(1-|\lambda|^2)^{-1/2})$ si $|\lambda| \neq 1$ et $(\varphi(f))(\lambda) = 0$ si $|\lambda| = 1$.

Soient $f \in C_0(X)$ et $h \in C_0(\mathbb{C})$ qui prolonge f ; on a $f = \varphi(h) \circ q$, donc si $\overline{\pi}(q) = Q(T)$, alors $\pi(f) = \varphi(h)(Q(T))$, d'où l'unicité de π.

Notons $z_0 \in C(\mathbb{C})$ et $q_0 \in C_b(\mathbb{C})$ les applications $\lambda \mapsto \lambda$ et $\lambda \mapsto \lambda(1+|\lambda|^2)^{-1/2}$. Notons $\pi_0 : C_0(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mor}(E)$ la représentation $f \mapsto \varphi(f)(Q(T))$; on a $\pi(1-|q|^2) = 1 - Q(T)^*Q(T)$ dont l'image est dense, donc π est non dégénérée. De plus, $\pi(q(1-|q|^2)) = Q(T)(1-Q(T)^*Q(T))$ donc $\overline{\pi}(q)$ et $Q(T)$ coïncident sur l'image de $1-Q(T)^*Q(T)$ qui est dense, donc ils sont égaux. Par ce qui précède appliqué à $X = \mathbb{C}$, on a $\widetilde{\pi_0}(z_0) = T$.

Le noyau de π_0 étant un idéal fermé de $C_0(\mathbb{C})$, il existe une partie fermée $Y \subset \mathbb{C}$ telle que $\ker \pi = \{ f \in C_0(\mathbb{C}) ,\ f|Y = 0 \}$. Notons $z_1 : Y \to \mathbb{C}$ l'inclusion et $\psi : C_0(\mathbb{C}) \to C_0(Y)$ l'application $f \mapsto f \circ z_1$. Comme ψ est un homomorphisme surjectif et $\ker \pi = \ker \psi$, il existe une représentation injective $\pi_1 : C_0(Y) \to \mathrm{Mor}(E)$ telle que $\pi_0 = \pi_1 \circ \psi$. Par l'exemple 14.27, $T = \widetilde{\pi_0}(z_0) = \widetilde{\pi_1}(z_0 \circ z_1)$, donc par le théorème 14.26.a), $\mathrm{Sp}\, T = \overline{z_0 \circ z_1(Y)} = Y$.

On pose alors $\pi : f \mapsto \pi_1(f|Y)$. Comme pour tout $f \in C_0(\mathbb{C})$ on a $\pi_0(f) = \pi(f \circ z)$, on a $T = \widetilde{\pi_0}(z_0) = \tilde{\pi}(z_0 \circ z)$ (exemple 14.27). □

Soit T un opérateur régulier normal. Notons $z \in C(\mathrm{Sp}\, T)$ la fonction $\lambda \mapsto \lambda$. Notons $\pi : C_0(\mathrm{Sp}\, T) \to \mathrm{Mor}(E)$ la représentation de $C_0(\mathrm{Sp}\, T)$ telle que $\tilde{\pi}(z) = T$. Pour $f \in C(\mathrm{Sp}\, T)$, l'opérateur $\tilde{\pi}(f)$ se note $f(T)$. Soit f une fonction définie sur une partie de $\mathbb{C}$ contenant $\mathrm{Sp}\, T$ et dont la restriction g à $\mathrm{Sp}\, T$ soit continue ; on pose $f(T) = g(T)$.

14.29 Théorème. *L'application $f \mapsto f(T)$ ainsi définie possède les propriétés suivantes :*

a) Pour tout $f \in C(\mathbb{C})$, $f(T)$ est un opérateur régulier normal, $f(T)^* = \overline{f}(T)$; $z(T) = T$ où z est la fonction $\lambda \mapsto \lambda$.

b) $\mathrm{Sp}\, f(T))$ est l'adhérence dans $\mathbb{C}$ de $f(\mathrm{Sp}\, T)$.

c) Pour toute fonction continue bornée f on a $f(T) \in \mathrm{Mor}(E)$ et $\|f(T)\| = \sup\{ |f(\lambda)| ,\ \lambda \in \mathrm{Sp}\, T \}$.

d) Pour tout couple (f, g) de fonctions continues sur $\mathbb{C}$, $(f+g)(T)$ est la fermeture de $f(T)+g(T)$ et $(fg)(T)$ celle de $f(T)g(T)$. Si de plus $g/|f+g|+1$ (resp. $g/|fg|+1$) est bornée, on a $(f+g)(T) = f(T)+g(T)$ (resp. $(fg)(T) = f(T)g(T)$).

e) Pour $f, g \in C(\mathbb{C})$, $f(T) = g(T)$ si et seulement si f et g coïncident sur $\mathrm{Sp}\, T$.

f) Pour $f, g \in C(\mathbb{C})$ on a $g \circ f(T) = g(f(T))$.

g) Si $T \in \mathrm{Mor}(E)$ l'application ainsi définie coïncide avec le calcul fonctionnel continu de la C^*-algèbre $\mathrm{Mor}(E)$.

Démonstration. Les assertions a), b) c) et d) découlent du théorème 14.26 appliqué à la représentation injective $\pi : C_0(\mathrm{Sp}\, T) \to \mathrm{Mor}(E)$.

e) Si f et g coïncident sur $\mathrm{Sp}\, T$, $f(T) = g(T)$ par définition. Si $f(T) = g(T)$, alors $(f-g)(T)$ qui est la fermeture de $f(T) - g(T)$ (par d) est nul, donc son spectre est réduit à $\{0\}$..

f) Notons $\pi : \mathbb{C}_0(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mor}(E)$ la représentation $h \mapsto (h \circ f)(T)$. Par l'exemple 14.27, π est non dégénérée et pour tout $h \in C(\mathbb{C})$, $\tilde{\pi}(h) = (h \circ f)(T)$; en particulier $\tilde{\pi}(z) = f(T)$, donc $(g \circ f)(T) = \tilde{\pi}(g) = g(f(T))$ par définition de $g \mapsto g(f(T))$.

g) Par a), c) et d) $f \mapsto f(T)$ est un homomorphisme de C^*-algèbres de $C(\mathrm{Sp}\,T)$ dans $\mathrm{Mor}(E)$ et donc coïncide avec le calcul fonctionnel continu de $\mathrm{Mor}(E)$ (corollaire 3.11.) $\square$

14.30 Corollaire. *Pour qu'un opérateur régulier d'un module hilbertien dans lui même soit autoadjoint il faut et il suffit qu'il soit normal et que son spectre soit réel.*

Démonstration. Un opérateur autoadjoint est clairement normal.

Soit T un opérateur régulier normal d'un module hilbertien dans lui même et notons z la fonction $\lambda \mapsto \lambda$. Par le théorème 14.29.a), pour que T soit autoadjoint il faut et il suffit que $z(T) = \overline{z}(T) = 0$ ce qui, par le théorème 14.29.e), équivaut à $\mathrm{Sp}\,T \subset \{\, \lambda \in \mathbb{C}\,,\ (z - \overline{z})(\lambda) = 0\} = \mathbb{R}$. $\square$

14.31 Corollaire. *Le spectre d'un opérateur régulier normal T d'un A-module hilbertien non nul E dans lui même n'est pas vide et les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathrm{Sp}\,T$ *est une partie bornée de* $\mathbb{C}$.

(ii) $\mathrm{dom}\,T = E$.

(iii) $T \in \mathrm{Mor}(E)$.

Démonstration. (iii) $\Rightarrow$ (ii) est clair et la réciproque résulte de la prop. 14.15.a).
(iii) $\Rightarrow$ (i) est clair et la réciproque résulte du théorème 14.29c).

Enfin, si $\mathrm{Sp}\,T$ n'est pas borné, il n'est pas vide ; s'il est borné, alors $T \in \mathrm{Mor}(E)$ et $\mathrm{Sp}\,T$ est le spectre de l'élément T de la C^*-algèbre $\mathrm{Mor}(E)$ (prop. 14.15.d) et n'est donc pas vide par la prop. 2.13. $\square$

14.32 Corollaire. *Pour un opérateur régulier T d'un A-module hilbertien E dans lui même les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) T est autoadjoint et son spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+$.

(ii) T est normal et pour tout $x \in \mathrm{dom}\,T$ on a $\langle x, Tx\rangle \in A_+$.

(iii) Il existe un opérateur régulier S de E dans un A-module hilbertien F tel que $T = S^*S$.

(iv) Il existe un opérateur régulier autoadjoint S de E dans lui même tel que $T = S^2$.

Démonstration. (iv) $\Rightarrow$ (iii) est clair et (iii) $\Rightarrow$ (i) résulte de la prop. 14.16.c). Si T satisfait (iii), alors pour tout $x \in \mathrm{dom}\,T$ on a $\langle x, Tx\rangle \in A_+$, donc (iii) $\Rightarrow$ (ii).

Supposons que T satisfait (ii). Définissons $f, g \in C_0(\mathrm{Sp}\,T)$ en posant $f(\lambda) = (1 + |\lambda|)^{-1}$ et $g(\lambda) = \lambda(1 + |\lambda|)^{-2}$. Pour tout $x \in E$ on a $f(T)x \in \mathrm{dom}\,T$ (th. 14.29.c) et d)) et $\langle f(T)x, Tf(T)x\rangle \in A_+$. Par la prop. 20.3.c), $g(T) = f(T)^*Tf(T) \in \mathrm{Mor}(E)_+$, donc $g(\mathrm{Sp}\,T) \subset \mathbb{R}_+$, ce qui implique que $\mathrm{Sp}\,T \subset \mathbb{R}_+$. Par le corollaire 14.30, T est autoadjoint, donc (ii) $\Rightarrow$ (i).

Enfin, si T satisfait (i), posons $S = f(T)$ où f est la fonction $\lambda \mapsto \lambda^{1/2}$ de $\mathrm{Sp}\,T$ dans $\mathbb{C}$. Par le théorème 14.29.a), S est autoadjoint. Par le théorème 14.29.d) $S^2 = (f^2)(T) = T$. $\square$

Un opérateur régulier T vérifiant les conditions équivalentes de ce corollaire est dit *autoadjoint positif*. Soit T un opérateur régulier autoadjoint positif. Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, de partie réelle strictement positive, on pose $T^\alpha = f_\alpha(T)$ où f_α est la fonction $\lambda \mapsto \lambda^\alpha$ sur $\mathrm{Sp}\,T$. Par le théorème 14.29.d), Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, de partie réelle strictement positive on a $T^\alpha T^\beta = T^{\alpha+\beta}$; si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on a $(T^\alpha)^\beta = T^{\alpha\beta}$ (th. 14.29.f).

14.33 Corollaire. *Soit T un opérateur régulier, autoadjoint, positif. L'opérateur $T^{1/2}$ est l'unique opérateur S régulier autoadjoint positif tel que $T = S^2$.*

Démonstration. Si $T = S^2$, alors $S = (S^2)^{1/2}$ par le théorème 14.29.f). $\square$