Université Grenoble Alpes | **Licence Sciences et Technologies**
MAT 402 | **Année 2017-2018**

Devoir surveillé du 12 mars 2016

Documents, calculatrices, et téléphones portables sont interdits.
La clarté de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.
Durée de l'épreuve : 2 heures. Les exercices sont indépendants.
Barème approximatif : cours sur 4 points ; exercice 1 sur 3 points ;
exercice 2 sur 5 points ; exercice 3 sur 8 points.

Question de cours

1. Enoncer précisément et démontrer le théorème de convergence des intégrales pour les suites de fonctions.
2. Donner un exemple d'une suite de fonctions $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$ et telle que la suite $\int_0^1 f_n(t)\,dt$ ne tende pas vers 0.

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$f_n : \begin{array}{rcl} [0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + e^{-nx}\sin(nx). \end{array}$$

1. Monter que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0\,;+\infty[$ vers une limite à déterminer.
2. Étudier la convergence uniforme sur $[a\,;+\infty[$ avec $a > 0$.
3. En étudiant la suite $(f_n(\pi/2n))_{n\in\mathbb{N}^*}$, montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$f_n : \begin{array}{rcl} [0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{e^{-x/n}}{\sqrt{n}}. \end{array}$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0\,;+\infty[$ vers une fonction f à déterminer.
2. Étudier la convergence uniforme sur $[0\,;+\infty[$.
3. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $a > 0$, on définit

$$I_n(a) = \int_0^a f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Justifier sans calcul que, pour tout $a > 0$, la suite $(I_n(a))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Soit $\alpha > 0$. Étudier la convergence de la suite $(I_n(n^\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$ en fonction de la valeur de α. Pour quelle valeurs de α la suite $(I_n(n^\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle vers $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$?

Tourner SVP

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$u_n : \begin{array}{ccc} [0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{(-1)^n}{(x+n)^2} \end{array}.$$

1. Étudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ sur $[0\,;+\infty[$.
   Dans la suite, on s'intéresse à la série de fonctions de terme général

$$v_n : \begin{array}{ccc}]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{(-1)^n}{x+n} \end{array}, \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

2. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge simplement sur $]0\,;+\infty[$. On note G sa somme.
3. Étudier la convergence normale et la convergence uniforme sur $[a\,;+\infty[$ avec $a > 0$.
4. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.
5. Montrer que pour tout $x \in]0\,;+\infty[$,

$$G(x) + G(x+1) = \frac{1}{x}.$$

6. Donner un équivalent de G en 0.
7. Donner un équivalent de G en $+\infty$. Pour cela, on pourra commencer par montrer que G est décroissante.