Université Grenoble Alpes | **Licence Sciences et Technologies**
MAT 402 | **Année 2017-2018**

Devoir surveillé du 12 mars 2016 (durée : 2 heures), éléments de correction.

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$f_n : \begin{array}{rcl} [0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + e^{-nx}\sin(nx). \end{array}$$

1. *Monter que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0\,;+\infty[$ vers une limite à déterminer.*
On a $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et si $x > 0$, $|e^{-nx}\sin(nx)| \le e^{-nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0\,;+\infty[$ vers f telle que : $\forall x \in [0\,;+\infty[, f(x) = x$.
2. *Étudier la convergence uniforme sur $[a\,;+\infty[$ avec $a > 0$.*
Si $x \ge a$, on a $|f_n(x) - f(x)| \le e^{-na}$, donc $\sup_{[a\,;+\infty[} |f_n - f| \le e^{-na} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et la convergence est uniforme sur $[a\,;+\infty[$.
3. *En étudiant la suite $(f_n(\pi/2n))_{n\in\mathbb{N}^*}$, montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $[0\,;+\infty[$.*
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(\pi/2n) - f(\pi/2n) = e^{-\pi/2}$, qui ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc la convergence n'est pas uniforme sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$f_n : \begin{array}{rcl} [0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{e^{-x/n}}{\sqrt{n}}. \end{array}$$

1. *Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0\,;+\infty[$ vers une fonction f à déterminer.*
Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \ge 0$, $|f_n(x)| \le 1/\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0\,;+\infty[$ vers la fonction nulle.
2. *Étudier la convergence uniforme sur $[0\,;+\infty[$.*
On déduit de la majoration ci-dessus que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sup_{x\ge 0} |f_n(x)| \le 1/\sqrt{n}$, donc la convergence est uniforme.
3. *Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $a > 0$, on définit $I_n(a) = \displaystyle\int_0^a f_n(x)\,\mathrm{d}x$.*
Justifier sans calcul que, pour tout $a > 0$, la suite $(I_n(a))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.
Cette convergence est assurée par la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers f sur $[0\,;a]$.
4. *Soit $\alpha > 0$. Étudier la convergence de la suite $(I_n(n^\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$ en fonction de la valeur de α. Pour quelle valeurs de α la suite $(I_n(n^\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle vers $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$?*
On calcule directement : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n(n^\alpha) = \big[-\sqrt{n}e^{-x/n}\big]_0^{n^\alpha} = \sqrt{n}(1 - e^{-n^{\alpha-1}})$.
Pour $\alpha > 1$, $n^{\alpha-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $1 - e^{-n^{\alpha-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $I_n(n^\alpha) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Pour $\alpha = 1$, $I_n(n^\alpha) = \sqrt{n}(1-1/e) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Pour $\alpha \in]0\,;1[$, $1 - e^{-n^{\alpha-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{\alpha-1}$ et $I_n(n^\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{\alpha-1/2}$: lorsque n tend vers $+\infty$, $I_n(n^\alpha)$ tend vers $+\infty$ si $\alpha \in]1/2\,;1[$, vers 1 si $\alpha = 1/2$, et vers 0 si $\alpha \in]0\,;1/2[$.
Finalement, $(I_n(n^\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ si et seulement si $\alpha \in]0\,;1/2[$.

Tourner SVP

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$u_n : \begin{array}{rcl} [0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{(-1)^n}{(x+n)^2} \end{array}.$$

1. *Étudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ sur $[0\,;+\infty[$.*
   Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$, $|u_n(x)| \leq 1/n^2$, et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} 1/n^2$ converge, donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge normalement sur $[0\,;+\infty[$.
   Dans la suite, on s'intéresse à la série de fonctions de terme général

   $$v_n : \begin{array}{rcl}]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{(-1)^n}{x+n} \end{array}, \textit{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

2. *Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge simplement sur $]0\,;+\infty[$. On note G sa somme.*
   À $x > 0$ fixé, on applique le critère des séries alternées : la suite $(1/(x+n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0, donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n(x)$ converge.
3. *Étudier la convergence normale et la convergence uniforme sur $[a\,;+\infty[$ avec $a > 0$.*
   Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq a$, $|v_n(x)| \leq 1/(a+n) = |v_n(a)|$, donc $\sup_{[a;+\infty[} |v_n| = 1/(a+n)$. Comme la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} 1/(a+n)$ diverge, il n'y a pas convergence normale de $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sur $[a\,;+\infty[$. Par contre, pour tous $N \in \mathbb{N}$ et $x \geq a$, on a la majoration du reste de la série alternée : $|\sum_{n=N}^{+\infty} v_n(x)| \leq |v_N(x)| \leq 1/(a+N) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il y a convergence uniforme de $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sur $[a\,;+\infty[$.
4. *Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.*
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$, et pour tout $x > 0$, $v_n'(x) = (-1)^{n+1}/(x+n)^2$. Ainsi, pour tout $a > 0$, $\sup_{[a;+\infty[} |v_n'| = 1/(a+n)^2$, et $\sum_{n\in\mathbb{N}} 1/(a+n)^2$ converge, si bien que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n'$ converge normalement sur $[a\,;+\infty[$. Comme la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ y converge simplement, on en déduit que sa somme G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,;+\infty[$. Puisque cela est valide pour tout $a > 0$, on en déduit que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$. On aurait aussi pu utiliser la convergence normale de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n'$ sur $]0\,;+\infty[\ldots$
5. *Montrer que pour tout $x \in]0\,;+\infty[$,*

   $$G(x) + G(x+1) = \frac{1}{x}. \tag{1}$$

   On a juste le décalage d'indices : pour tout $x > 0$, $G(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n/(x+1+n) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1}/(x+k) = -\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n/(x+n) = -G(x) + 1/x$.
6. *Donner un équivalent de G en 0.*
   On sait que G est continue sur $]0\,;+\infty[$, donc quand x tend vers 0, $G(x+1)$ tend vers $G(1)$; d'après (1), $xG(x)$ tend alors vers 1 ; ainsi, $G(x)$ équivaut à $1/x$ lorsque x tend vers 0.
7. *Donner un équivalent de G en $+\infty$. Pour cela, on pourra commencer par montrer que G est décroissante.* D'après la question 4, pour tout $x > 0$, on a $G'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1}/(x+n)^2$. Le critère des séries alternées assure que cette somme a le signe de son premier terme, soit $-1/x^2$, négatif. Donc G est décroissante. Alors, d'après (1), $1/x = G(x) + G(x+1) \leq 2G(x)$, et aussi : $2G(x+1) \leq G(x) + G(x+1) = 1/x$. On en déduit, pour $x > 1$: $1/(2x) \leq G(x) \leq 1/2(x-1)$. Donc quand x tend vers $+\infty$, $xG(x)$ tend vers $1/2$, et $G(x)$ équivaut à $1/2x$.