MAT402 **Année 2017-2018**

Contrôle Continu 2 :
exemple de solution.

Autour du cours

Exercice 1.

(a) On applique le critère de D'Alembert :

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{((n+1)^3+1)(n^2+n+1)}{((n+1)^2+(n+1)+1)(n^3+1)} = \frac{(1+\frac{1}{n})^3}{1+\frac{1}{n^3}}.\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{(1+\frac{1}{n})^2+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}.$$

On obtient $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 1$. Le rayon de convergence est donc $R = 1$.

(b) On applique à nouveau D'Alembert :

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{e^{n+1} \cdot n!}{(n+1)!e^n} = \frac{e}{n+1}.$$

On obtient $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 0$. Le rayon de convergence est donc $R = \infty$.

(c) Pour $z = 2$ la série diverge (car son terme général ne tend pas vers 0 : il vaut 1), le rayon de convergence est inférieur ou égal à 2. De plus pour $z = 2$ le terme général est 1 qui est borné, le rayon de convergence est donc supérieur ou égal à 2. Il suit donc que $R = 2$.

Exercice 2.

1. Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

2. Supposons que $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ soit solution de (1) sur un intervalle $]-s, s[$ avec $0 < s \leq 1$. On a alors pour tout $x \in]-s, s[$:

$$xS'(x) + S(x) = x \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) a_n x^n.$$

Deux séries entières ont leurs sommes qui coïncident sur un intervalle si et seulement si leurs coefficients sont égaux. On obtient donc :

$$a_0 = 0 \text{ et } a_n = -\frac{1}{n(n+1)} \ \forall\, n \geq 1.$$

3. On vérifie facilement (par exemple D'Alembert) que le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est $R = 1$. Sa somme S est donc une fonction (définie et dérivable) sur $]-1, 1[$.

4. En remarquant que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, on obtient pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$S(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n} + \ln(1-x)$$

Ainsi, si $x \neq 0$, on a :

$$S(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + \ln(1-x) = \frac{1}{x}(x - \ln(1-x)) + \ln(1-x) = -1 + \frac{x-1}{x} \ln(1-x).$$

De plus $S(0) = 0$ (qui est par ailleurs le prolongement par continuité en 0 de la fonction $x \mapsto -1 + \dfrac{x-1}{x} \ln(1-x)$.

5. On calcule facilement pour $x \neq 0$,

$$S'(x) = -\frac{1}{1-x} \times \frac{x-1}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x^2} = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{\ln(1-x)}{x}\right),$$

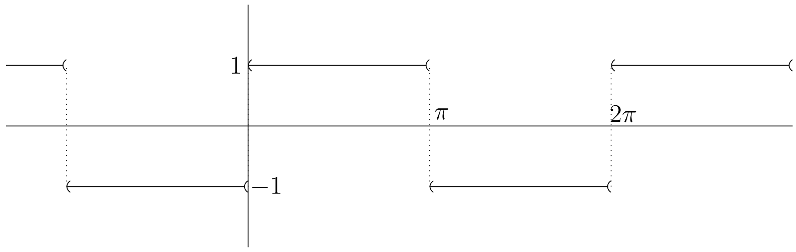
ce qui donne

$$xS'(x) + S(x) = 1 + \frac{\ln(1-x)}{x} - 1 + \frac{x-1}{x}\ln(1-x) = \ln(1-x).$$

Par ailleurs, $0S'(0) + S(0) = \ln(1)$. La fonction S est donc solution de (1).

Exercice 3.

1.



2. On a $a_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 0$ car f est (presque!!) impaire. On calcule

$$\begin{aligned} b_n(f) =& \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin(nx)dx - \int_{\pi}^{2\pi}\sin(nx)dx\right) \\ =& \left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{\pi}^{2\pi} = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n). \end{aligned}$$

On a donc $b_{2n}(f) = 0$ et $b_{2n+1}(f) = \dfrac{4}{\pi(2n+1)}$.

3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π-périodique et continue par morceaux. Notons a_n et b_n ses coefficients de Fourier réels. Alors les séries $\sum_{n\geq 1} a_n^2$ et $\sum_{n\geq 1} b_n^2$ convergent et on a

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

En appliquant cette formule à la fonction précédente on obtient :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = 2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{\pi(2n+1)}\right)^2 = \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

D'où la formule $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.