Université Grenoble Alpes **Licence Sciences et Technologies**
MAT 402 **Année 2017-2018**

Corrigé Examen Final

Exercice 1.1. Commençons par étudier la convergence simple (si on a l'intuition du résultat, on peut sauter cette étape). Pour $x = 0$, $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(f_n(0))_n$ tend vers 0. Pour $x > 0$, par croissances comparées, $f_n(x) = nx^2e^{-nx} = x^2n(e^{-x})^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Finalement, $(f_n)_n$ CVS vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

Étudions maintenant la CVU. Pour déterminer $\|f_n - \tilde{0}\|_\infty = \|f_n\|_\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on étudie les variations de f_n, qui est dérivable, de dérivée $f_n' : x \mapsto nx(2-nx)e^{-nx}$, positive sur $[0, \frac{2}{n}]$ (pour $n \geq 1$) et négative sur $[\frac{2}{n}, +\infty[$. Comme f_n est en outre positive, nulle en 0 et de limite 0 en $+\infty$, on obtient $\|f_n\|_\infty = f_n(\frac{2}{n}) = \frac{4}{n}e^{-2}$, qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, d'où la CVU.

1.2. $(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n})$ est divergente, donc $(\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_\infty)$ aussi, donc $(\sum_n f_n)$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$. En revanche, puisque $\frac{2}{n} \leq 3$ pour tout $n \geq 1$, d'après les variations étudiées ci-dessus, $\sup_{[3,+\infty[} |f_n| = f_n(3) = 9ne^{-3n} = o(\frac{1}{n^2})$ par croissances comparées, or $(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2})$ est convergente (critère de Riemann) donc par comparaison $(\sum_{n\geq 1} \sup_{[3,+\infty[} |f_n|)$ l'est aussi, ce qui signifie que $(\sum_n f_n)$ converge normalement sur $[3, +\infty[$.

Exercice 2.1. Soit $x \in I$. Pour tout $n \geq 1$, $u_n(x)$ est bien défini et

$$|u_n(x)| = \frac{|x|}{n(n+x)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|x|}{n^2},$$

terme général d'une série convergente (Riemann), donc $(\sum_{n\geq 1} u_n(x))$ est absolument convergente et a fortiori convergente, ce qui signifie que $S(x)$ est bien défini.

2.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [a, b]$, $|x| \leq C := \max(|a|, |b|)$ et $0 < n + a \leq n + x$ donc

$$|u_n(x)| = \frac{|x|}{n(n+x)} \leq \frac{C}{n(n+a)}.$$

Ainsi $\sup_{[a,b]} |u_n| \leq \frac{C}{n(n+a)}$, terme général d'une série convergente (comme dans la question précédente), donc $(\sum_n u_n)$ converge normalement sur $[a, b]$, donc uniformément. Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est continue sur $[a, b]$ (fraction rationnelle) donc par théorème de continuité, $S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est continue sur $[a, b]$. Ceci étant vrai pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I, S est continue sur I.

2.3. $[0, 1]$ est un segment inclus dans I, donc d'après la question précédente, $(\sum_{n\geq 1} u_n)$ converge uniformément vers S sur $[0, 1]$. À nouveau, les u_n sont continues sur $[0, 1]$. Le théorème d'interversion somme/intégrale affirme que sous ces hypothèses,

$$\int_0^1 S(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^1 u_n(x)dx \right)$$

(en particulier le second membre a un sens). Pour tout $n \geq 1$,

$$\int_0^1 u_n(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{n}dx - \int_0^1 \frac{1}{n+x}dx = \frac{1}{n} - [\ln(n+x)]_0^1 = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n)$$

donc

$$\int_0^1 S(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n)\right),$$

ou encore

$$\int_0^1 S(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)\right)\right).$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)\right) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} (-\ln(k+1) + \ln(k)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \quad \text{(somme téléscopique)} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) + (\ln(n) - \ln(n+1)) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) - \underbrace{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0},
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu.

2.4. Pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}
S(x+1) - S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x+1) - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n(x+1) - u_n(x)) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1}\right) \\
&= \frac{1}{1+x}
\end{aligned}$$

(somme téléscopique $+ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+x+1} = 0$).

2.5. On a donc, pour tout $x \in I$, $S(x) = S(x+1) - \frac{1}{1+x}$. Or S est continue en $0 \in I$ donc $\lim_{x\to(-1)^+} S(x+1) = S(0) = 0$ et comme $\lim_{x\to(-1)^+} \frac{1}{1+x} = +\infty$, on a

$$S(x) \underset{x\to(-1)^+}{\sim} -\frac{1}{1+x}.$$

Exercice 3. 1. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Diverses méthodes sont envisageables pour déterminer le rayon de convergence, notamment la règle de d'Alembert, ou le retour à la définition avec les croissances comparées.

Méthode 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \neq 0$ et

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{-\alpha}}{n^{-\alpha}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

par continuité de l'application $x \mapsto x^{-\alpha}$ en 1. Donc par la règle de d'Alembert, le rayon de cv est $1/1 = 1$.

Méthode 2. Si $|z| < 1$, $(\frac{z^n}{n^\alpha})_n$ tend vers 0 par croissances comparées, donc $R \geq 1$. Et si $|z| > 1$, $(\frac{|z|^n}{n^\alpha})_n$ tend vers $+\infty$, toujours par croissances comparées, donc $R \leq 1$, et finalement $R = 1$.

3.2. La somme d'une série entière de rayon de convergence R est C^∞ sur $]-R, R[$ (thm de cours), d'où la conclusion.

3.3. L_α est bien définie sur $]-1,1[$ par définition du rayon de cv et pour tout $x \in]-1,1[$ (de sorte que $-x \in]-1,1[$ également),

$$\begin{aligned} L_\alpha(-x) + L_\alpha(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n^\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x)^n + x^n}{n^\alpha} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} ((-1)^n + 1) \frac{x^n}{n^\alpha}. \end{aligned}$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^n + 1 = 0$ si n est impair et 2 si n est pair, i.e. s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tq $n = 2k$. Ainsi,

$$L_\alpha(-x) + L_\alpha(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2 \frac{x^{2k}}{(2k)^\alpha} = 2^{1-\alpha} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^k}{k^\alpha} = 2^{1-\alpha} L_\alpha(x^2).$$

3.4. La dérivée de la somme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence s'obtient par dérivation terme à terme donc pour tout $x \in]-1,1[$

$$L'_{\alpha+1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n x^{n-1}}{n^{\alpha+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n^\alpha}$$

donc $x L'_{\alpha+1}(x) = L_\alpha(x)$. Par suite,

$$L_{\alpha+1}(x) = \underbrace{L_{\alpha+1}(0)}_{0} + \int_0^x L'_{\alpha+1}(t)dt = \int_0^x \frac{L_\alpha(t)}{t} dt$$

(au sens des intégrales généralisées, la fonction $t \mapsto \frac{L_\alpha(t)}{t}$ n'étant, strictement parlant, pas définie en 0, mais se prolongeant par continuité par $L'_{\alpha+1}(0)$).

3.5. Pour $\alpha = 0$, on a $L_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = x \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{x}{1-x}$ (cours). D'après la question précédente (ou le cours),

$$L_1(x) = \int_0^x \frac{L_0(t)}{t} dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = [-\ln(1-t)]_0^x = -\ln(1-x)$$

et

$$L_{-1}(x) = x L'_0(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Exercice 4.1. (0,5 point) Dessin.

4.2. f est impaire donc $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Toujours par imparité, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin(nt)dt \underset{\text{IPP}}{=} \frac{2}{\pi}\left(\left[(\pi - t) \times \frac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi (-1) \times \frac{-\cos(nt)}{n}dt\right)$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{n} - \left[\frac{\sin(nt)}{n^2}\right]_0^\pi\right)$$
$$= \frac{2}{n}.$$

La série de Fourier de f est donc $(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{2\sin(nx)}{n})$ (avec abus de notation).

4.3. f est C^1 par morceaux (les restrictions de f à $]0, \pi]$ et à $[-\pi, 0[$, affines, se prolongent au bord en fonctions C^1, donc f est C^1 par morceaux sur $[-\pi, \pi]$, et donc sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité), donc d'après le thórème de Dirichlet, sa série de Fourier converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $\tilde{f}$ valant $f(x)$ si f est continue en x et $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ sinon. Or les seuls points de discontinuité de f sont les multiples de 2π (cf graphe), et

$$f(0) = 0 = \frac{\pi + (-\pi)}{2} = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2},$$

et de même pour les autres multiples de 2π, donc $f = \tilde{f}$. Donc f est égale à la somme de sa série de Fourier sur $\mathbb{R}$.

La convergence ne peut être uniforme puisque les sommes partielles, des polynômes trigonométriques, sont continues, alors que f ne l'est pas (contraposée du thm de continuité d'une la limite uniforme).

4.4. f étant C^0 par morceaux et 2π-périodique, le théorème de Parseval s'applique et donne :

$$\frac{a_0(f)^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k(f)^2 + b_k(f)^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

soit d'après ce qui précède et par parité de $|f|^2$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4}{k^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\pi - t|^2 dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{(\pi - t)^3}{3}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{3}$$

soit enfin

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{(ouf!)}.$$

D'autre part, on a déjà vu que le théorème de Dirichlet donnait :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\sin(nx)}{n}$$

et en particulier, en $x = \frac{\pi}{2}$,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\sin(n\frac{\pi}{2})}{n}.$$

Or $\sin(n\frac{\pi}{2}) = 0$ si n et pair et $(-1)^k$ si $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, donc

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^{+\infty} 2\frac{(-1)^k}{2k + 1}$$

et finalement :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$