Université Grenoble Alpes | **Licence Sciences et Technologies**
MAT 402 | **Année 2017-2018**

Examen Seconde Session

Documents, calculatrices, et téléphones portables sont interdits.
La clarté de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.
Durée de l'épreuve : 2 heures. Les exercices sont indépendants.
Barème approximatif : exercice 1 sur 3 points ;
exercice 2 sur 10 points ; problÃĺme sur 7 points.

Exercice 1

On considère la suite de fonctions sur $[0,1]$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}.$$

1. En étudiant, pour $n \in \mathbb{N}$, les variations de f_n sur $[0,1]$, montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction f à préciser.
2. Montrer que la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction g à préciser. La convergence est-elle uniforme ?
3. A-t-on $f' = g$?

Exercice 2

1. Développer en série entière autour de 0 les fonctions $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et $x \mapsto \frac{1}{1+x}$. Préciser les domaines de convergence des séries obtenues.
2. Trouver une solution développable en série entière autour de l'origine de l'équation différentielle :
$$4x^2y''(x) + 4xy'(x) - y = \frac{x}{1-x}. \tag{E}$$
DÃĺterminer le rayon de convergence de la sÃĺrie entière obtenue.
3. Montrer que l'application $\varphi : x \in [-1,1] \mapsto \varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{4n^2-1}$ est bien définie et continue.
4. Déterminer des constantes α et β telles que :
$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{4n^2-1} = \frac{\alpha}{2n-1} + \frac{\beta}{2n+1}.$$
5. Montrer que la fonction $u \mapsto \ln\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}$ admet pour développement en série entière sur $]-1,1[$
$u \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n+1}}{2n+1}$.
6. Pour $x \in]0,1[$, on définit $H(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$. Déduire de la question précédente une expression de $H(x)$ à l'aide de fonctions usuelles. On pourra poser $u = \sqrt{x}$.
7. En déduire une expression de $\varphi(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

Problème

1. Soit $a \in]0, \pi[$. On considère dans cette question la fonction f 2π-périodique et paire, définie par $f(x) = 1$ sur $[0, a[$ et 0 sur $[a, \pi]$.
   (a) Tracer le graphe de f.
   (b) Calculer les coefficients de Fourier de f, et écrire sa série de Fourier.
2. En appliquant des résultats du cours que l'on énoncera (et dont on vérifiera que les hypothèses sont satisfaites), déduire de ce qui précède que

$$\forall a \in]0, \pi[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(na)}{n} = \frac{\pi - a}{2} \tag{1}$$

   et

$$\forall a \in]0, \pi[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(na)}{n^2} = \frac{a(\pi - a)}{2}. \tag{2}$$

3. On considère maintenant la série de fonctions $\left(\sum_{n\geq 1} s_n\right)$, où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad s_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}.$$

   (a) La formule (1) montre que cette série converge simplement sur $]0, \pi[$ vers une fonction. Laquelle ?
   Montrer que $\left(\sum_{n\geq 1} s_n\right)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ tout entier vers une fonction impaire et 2π-périodique, et tracer le graphe de $\sum_{n=1}^{+\infty} s_n$ sur $[-2\pi, 2\pi]$.
   (b) La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?
4. On considère maintenant la série de fonctions $\left(\sum_{n\geq 1} s_n^2\right)$.
   (a) Montrer qu'elle converge normalement sur $\mathbb{R}$.
   (b) En utilisant la formule (2), déterminer sa somme $h : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(nx)}{n^2}$ sur $\mathbb{R}$.
5. (*Hors barème*)
   (a) Donner une relation entre $\cos(2\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, puis justifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{\pi^2}{12} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{2n^2}.$$

   On pourra utiliser librement que le fait que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

   (b) En déduire sans calcul la valeur des coefficients de Fourier de h (on justifiera à l'aide d'un théorème du cours que l'on énoncera)