Université Grenoble Alpes **Licence Sciences et Technologies**
MAT 402 **Année 2018-2019**

Partiel du 15 mars 2019

Documents, calculatrices, et téléphones portables sont interdits.
La clarté de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.
Durée de l'épreuve : 2 heures. Les exercices sont indépendants.
Barème approximatif : cours sur 2 points, exercice 1 sur 4 points,
exercice 2 sur 5 points, exercice 3 sur 9 points.

Questions de cours

1. Donner la définition de la convergence normale d'une série de fonctions $(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n)$ sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
2. Démontrer que si une série de fonctions $(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n)$ converge normalement sur I, alors elle converge uniformément sur I.

Exercice 1

Soit $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_0(x) = e^{-x^2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit également $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = f_0(x-n).$$

1. Étudier les variations de f_0, et donner l'allure de son graphe. Donner l'allure des graphes de f_1 et f_2.
2. Monter que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction à déterminer.
3. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.
4. Soit $a > 0$. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[-a, a]$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$f_n : \begin{array}{rcl} [1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{nx^{1+\frac{1}{n}}}. \end{array}$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[1, +\infty[$ vers une fonction f à déterminer.
2. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[1, +\infty[$.
3. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $A > 1$, on définit

$$I_n(A) = \int_1^A f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Justifier sans calcul (mais en donnant précisément l'énoncé d'un théorème) que, pour tout $A > 1$, la suite $(I_n(A))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\int_1^A f(x)dx$.
4. Soient $\alpha > 1$ et $\beta > 0$. Étudier la convergence des suites $(I_n(\alpha^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(I_n(n^\beta)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Que peut-on dire en général de la convergence de $(\int_1^{u_n} f_n(x)dx)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in [1, +\infty[^{\mathbb{N}}$ est une suite tendant vers $+\infty$?

Tourner SVP

Exercice 3

1. Lorsque $\alpha \in \mathbb{R}$, démontrer (sans invoquer un résultat sur les "séries de Bertrand", mais en admettant celui sur les "séries de Riemann") les résultats suivants sur la série numérique $(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n)$, de terme général $a_n = \frac{\ln(n)}{n^\alpha}$:
- si $\alpha > 1$, la série $(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n)$ converge ;
- si $\alpha \leq 1$, la série $(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n)$ ne converge pas.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$u_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^x}. \end{array}$$

2. Montrer que la série de fonctions $(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n)$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$, mais pas sur $]1, +\infty[$.
3. Soit $x > 0$.
   (a) Montrer que la suite $(\frac{\ln(n)}{n^x})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante à partir d'un certain rang N_x qui décroît avec x et que l'on précisera.
   (b) En déduire la convergence de $(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n(x))$.
4. Montrer que $(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n)$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$, pour tout $a > 0$ (on pourra commencer, en reprenant la question précédente, par établir, pour $x > 0$ et $n \geq N_x$, une majoration utile de $|R_n(x)| = |\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)|$).
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la limite l_n de $u_n(x)$ quand x tend vers 0^+ et étudier la série $(\sum_n l_n)$.
6. A-t-on convergence uniforme de $(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n)$ sur $]0, +\infty[$?

On s'intéresse maintenant à la série de fonctions de terme général

$$v_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{(-1)^n}{n^x}. \end{array}$$

7. Montrer que la série $(\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n)$ converge simplement sur $]0\,;+\infty[$ et pas ailleurs. On note G sa somme.
8. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.