Université Grenoble Alpes **Licence Sciences et Technologies**
MAT 402 **Année 2018-2019**

Devoir surveillé du 18 avril 2019

Corrigé

Question de cours. 1. Au choix :

- $(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e_k)$ avec $e_k : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{ikx}$ (ou plus simplement, avec abus usuel : $(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{ikx})$) où $(c_k(f))_{k\in\mathbb{Z}}$ désigne les coefficients de Fourier "exponentiels" de f ; ou
- $(\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} a_k(f)\cos_k + b_k(f)\sin_k)$ avec $\cos_k : x \mapsto \cos(kx)$ et $\sin_k : x \mapsto \sin(kx)$ (ou plus simplement, avec abus usuel : $(\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)))$ où $(a_k(f))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k(f))_{k\in\mathbb{N}^*}$ désignent les coefficients de Fourier "trigonométriques" de f.

2. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique, C^1 par morceaux et continue, sa série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f.

Exercice 1. Dans tout l'exercice, on note R le rayon de cv de la série étudiée.

1.a. On peut utiliser directement la règle de d'Alembert, ou commencer par remarquer que $\frac{2n^2}{n+1} \sim 2n$, donc (théorème de cours) le rayon de la série étudiée est le même que celui de $(\sum 2nz^n) = (\sum a_n z^n)$ avec $a_n \neq 0$ pour tout $n \geq 1$ et $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, donc par d'Alembert, $R = \frac{1}{1} = 1$.

b. Une possibilité : soit $z \in \mathbb{C}$. $(\ln(n)z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|z| < 1$ (si $|z| < 1$, $(|\ln(n)z^n|)_{n\in\mathbb{N}} = (\ln(n)|z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 par croissances comparées et si $|z| \geq 1$, cette suite tend vers $+\infty$), donc d'après le cours, $R = 1$.

c. Une possibilité : pour tout $z \neq 0$, $|n^n z^{2n}| = |nz^2|^n$ tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$ (car $|nz^2| > 1$ apcr). Donc le domaine de cv de la série entière est $\{0\}$, donc $R = 0$.

d. $(a_n)_n$ est bornée et ne tend pas vers 0, or on a vu en TD (le re-justifier) que dans ce cas, $R = 1$.

2.a. Dans les deux cas, le TG diverge pour $|x| > 1$ et est un $o(\frac{1}{n^2})$ pour $|x| < 1$ par croissances comparées. Donc le domaine réel de cv est inclus dans $[-1, 1]$ et contient $]-1, 1[$ (par thm de comparaison). Pour la première, on a divergence pour $x = 1$ (série harmonique) et convergence pour $x = -1$ (série alternée). Le domaine de cv est donc $[-1, 1[$. Pour la seconde, pour tout $x \in [-1, 1]$, $|\frac{x^n}{n^2-1}| \leq \frac{1}{n^2-1}$, TG d'une série convergente, donc la série entière converge en fait normalement sur $[-1, 1]$ (ce qui répond à une partie de la question (c)). A fortiori, le domaine de cv (réel) est $[-1, 1]$. Ceci entraîne directement que le rayon de cv de ces deux séries est 1.

2.b. Posons, pour tout $x \in]-1, 1[$, $S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1}$ et $T(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2-1}$ (bien définies d'après la question précédente). Alors, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k} = x\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -x\ln(1-x).$$

Remarquons que pour tout $n \geq 2$, $\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1})$, et que la série entière $(\sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n+1})$ a également 1 comme rayon de cv, donc on peut écrire, pour tout $x \in]-1, 1[\setminus\{0\}$,

$$2T(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = S(x) - \frac{1}{x}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = S(x) - \frac{1}{x}(-\ln(1-x) - x - \tfrac{x^2}{2})$$

et finalement $T(x) = \frac{1}{2}\left((\frac{1}{x} - x)\ln(1-x) + 1 + \frac{x}{2}\right)$, et $T(0) = 0$ (on peut vérifier que l'expression ci-contre tend bien vers 0 quand x tend vers 0).

2.c. On a déjà justifié la CVN sur $[-1,1]$, et celle-ci entraîne la CVU. Par théorème de continuité, $x \mapsto \frac{x^n}{n^2-1}$ étant continue sur $[-1,1]$ pour tout $n \geq 2$, T est donc continue sur $[-1,1]$, et en particulier en -1. L'expression de la question précédente définissant une fonction continue sur $[-1,0[\cup]0,1[$, et en particulier en -1, cette expression de T est valable en -1 également (et elle n'est pas définie en 0 et 1 donc il n'y a rien d'autre à dire).

Exercice 2. 1. Théorème de cours : en tant que somme d'une série entière, S est en fait C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R,R[$, donc a fortiori C^2 et (même théorème) ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme : pour tout $x \in]-R,R[$,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)a_{k+1}x^k \quad \text{et} \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)ka_{k+1}x^{k-1}$$

(ce sont les deuxièmes formes qui vont être les plus adaptées pour répondre à la question suivante).

2. Ainsi, pour tout $x \in I =]-R,R[$,

$$\begin{aligned}
4xS''(x) + 2S'(x) - S(x) &= 4x\sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)ka_{k+1}x^{k-1} + 2\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)a_{k+1}x^k - \sum_{k=0}^{+\infty}a_kx^k \\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty}4(k+1)ka_{k+1}x^k}_{=\sum_{k=0}^{+\infty}\cdots} + \sum_{k=0}^{+\infty}2(k+1)a_{k+1}x^k - \sum_{k=0}^{+\infty}a_kx^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}((4k(k+1)+2(k+1))a_{k+1} - a_k)x^k = \sum_{k=0}^{+\infty}((2k+1)(2k+2)a_{k+1} - a_k)x^k.
\end{aligned}$$

Or S est solution de (E) sur I ssi $\forall x \in I$, $4xS''(x) + 2S'(x) - S(x) = 0$, i.e. ssi

$$\forall x \in I, \sum_{k=0}^{+\infty}\underbrace{((2k+1)(2k+2)a_{k+1} - a_k)}_{b_k}x^k = 0$$

et d'après le théorème de cours sur l'unicité de la décomposition en série entière, ceci équivaut à la nullité de tous les b_k, i.e. à $(*)$.

3.a. On vérifie par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{a_0}{(2n)!}$.

3.b. Si $a_0 = 0$ le rayon est $+\infty$. Sinon, la suite ne s'annule pas, et $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \to 0$ donc par la règle de d'Alembert, le rayon est $+\infty$ à nouveau.

4.a. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}t^{2k}$ et $e^t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}$ (cours) donc

$$\cosh(t) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-t)^n}{n!}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\frac{1}{2}(1+(-1)^n)}{n!}t^n = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^{2k}}{(2k)!}$$

(les termes d'indice impair sont nuls). Le domaine de validité est $\mathbb{R}$ dans tous les cas.

4.b. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x > 0$, en appliquant ce qui précède à $t = \sqrt{x}$, on obtient $\cosh(\sqrt{x}) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\sqrt{x})^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{(2k)!}$. Si $x < 0$, en posant $t = \sqrt{-x}$, on obtient

$$\cos(\sqrt{-x}) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(\sqrt{-x})^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(-x)^k}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{(2k)!}.$$

Enfin pour $x = 0$, $1 = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{(2k)!}$.

On vient donc de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{(2k)!}$, ce qui montre que φ est développable en série entière en 0 puisqu'on a vu que le rayon de cv de la série entière correspondante était non nul, en l'occurrence $+\infty$. Enfin la question 2 affirme que la somme de cette série entière, à savoir φ, est solution de (E).