

Devoir surveillé du 18 avril 2019

Durée de l'épreuve : 1h30

Documents, calculatrices, et téléphones portables sont interdits.

La clarté de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.

Les exercices sont indépendants.

*Barème approximatif : cours sur 1,5 points, exercice 1 sur 10 points,
exercice 2 sur 8,5 points.*

Question de cours.

1. Donner une expression de la série de Fourier d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux et 2π -périodique en termes des coefficients de Fourier de f (dont on ne demande pas l'expression).
2. Donner l'énoncé du théorème de convergence normale pour les séries de Fourier.

Exercice 1.

1. Déterminer les rayons de convergence des séries entières

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2n^2}{n+1} z^n \right), \quad \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln(n) z^n \right), \quad \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} n^n z^{2n} \right) \quad \text{et} \quad \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n \right)$$

où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite complexe périodique non identiquement nulle.

2. On considère les séries entières :

$$\left(\sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n-1} \right), \quad \left(\sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n^2-1} \right).$$

- (a) Déterminer, dans l'ordre de votre choix, le domaine de convergence simple (dans $\mathbb{R}$) de chacune de ces séries entières, ainsi que leur rayon de convergence commun R .
- (b) Calculer leurs sommes sur $] -R, R[$.
- (c) Justifier que la seconde série entière converge normalement sur $[-R, R]$. Qu'en déduit-on sur le domaine de validité de l'expression de sa somme trouvée dans la question précédente ? (Justifier !)

Exercice 2. On considère l'équation différentielle $(E) : 4xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = 0$.

Soit $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n)$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et S sa somme.

1. Justifier que S est C^2 sur $] -R, R[$ et donner, pour tout $x \in] -R, R[$, une expression de $S'(x)$ et $S''(x)$.
2. Montrer que S est solution de (E) si et seulement si

$$(*) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{(2n+1)(2n+2)}.$$

3. On suppose $(*)$ satisfaite.

- (a) Exprimer a_n en fonction de n et de a_0 pour tout $n > 0$.
- (b) Déterminer le rayon de convergence de $(\sum_{n \geq 0} a_n x^n)$.

4. On rappelle que pour tout $t > 0$, $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$.

- (a) Donner le développement en série entière de $\cos$ en 0 et déterminer celui de $\cosh$ (on précisera le domaine de validité de ces développements).

Tourner la page S.V.P.

- (b) Montrer que la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \cosh(\sqrt{x}) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \cos(\sqrt{-x}) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

est développable en série entière en 0. Justifier à l'aide des questions précédentes qu'elle est solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.