Université Grenoble Alpes **Licence Sciences et Technologies**
MAT 402 **Année 2018-2019**

Examen du 22 mai 2019

Exercice 1.1.a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $a_n = \frac{e^{in\frac{\pi}{3}}}{n^2}$ ($\neq 0$). Alors $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc d'après la règle de d'Alembert, $R = \frac{1}{1} = 1$.

1.b. Par définition du rayon de convergence, D est inclus dans le disque unité fermé de $\mathbb{C}$, $\bar{D}(0,1)$. Et pour tout $z \in \bar{D}(0,1)$, $|\frac{e^{in\frac{\pi}{3}}}{n^2} z^n| \leq \frac{1}{n^2}$, terme général d'une série convergente (série de Riemann). Donc par comparaison, $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\frac{\pi}{3}}}{n^2} z^n\right)$ converge absolument, donc converge. Ainsi, $\bar{D}(0,1) \subset D$, et finalement $D = \bar{D}(0,1)$.

2.a. On peut (par exemple) étudier l'ensemble des z tels que la suite $((3n+1)z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour montrer que $R' = 1$, ou répondre aux deux questions d'un coup.

2.b. $\left(\sum_{n\geq 0}(3n+1)z^{3n+1}\right)$ a le même rayon de convergence que $\left(\sum_{n\geq 0}(3n+1)z^{3n}\right)$, qui est la série entière dérivée de $\left(\sum_{n\geq 0} z^{3n+1}\right)$, et a donc le même rayon, à savoir 1 (pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\left(\sum_{n\geq 0} z \times z^{3n}\right)$ converge si et seulement si $|z^3| < 1$ (série géométrique), i.e. ssi $|z| < 1$).

Si l'on pose, pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(3n+1)x^{3n+1}$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n+1}$, on a donc, par théorème de dérivation terme à terme des sommes de séries entières, $f(x) = xg'(x)$, avec

$$g(x) = x\sum_{n=0}^{+\infty}(x^3)^n = \frac{x}{1-x^3}, \quad \text{donc} \quad f(x) = x\frac{1-x^3+3x^3}{(1-x^3)^2} = \frac{x+2x^4}{(1-x^3)^2}.$$

Exercice 2. 1. Dessin.

2. φ est C^1 donc en particulier *continue* sur le *segment* $[0,1]$ donc bornée : il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $|\varphi(y)| \leq C$ pour tout $y \in [0,1]$.

Pour tout $x \in [0,1]$, si $x \in [0,\frac{1}{n}]$, $nx \in [0,1]$ donc $|f_n(x)| \leq \frac{C}{n}$, et si $x \in]\frac{1}{n},1]$, $f_n(x) = 0$. Ainsi, $\|f_n\|_{\infty,[0,1]} \leq \frac{C}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction nulle, que l'on note f.

3. La restriction de f_n à $[0,\frac{1}{n}]$ est de classe C^1 par composition, et sa restriction à $[\frac{1}{n},1]$ l'est aussi puisque c'est la fonction nulle ($f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}\varphi(n\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}\varphi(1) = 0$). Cela montre que f_n est continue sur $[0,1]$ (en $\frac{1}{n}$, elle l'est à droite et à gauche), et pour montrer qu'elle est de classe C^1, il ne reste qu'à montrer que ses dérivées à droite et à gauche en $\frac{1}{n}$ coïncident. Or celle à gauche vaut $\frac{n\varphi'(n\times\frac{1}{n})}{n} = \varphi'(1) = 0$ et celle à droite vaut 0.

Pour tout $x \in [\frac{1}{n},1]$, $f_n'(x) = 0$, et pour tout $x \in [0,\frac{1}{n}]$, $f_n'(x) = \varphi'(nx)$.

4. Étant donné $x \in]0,1]$, si $n_0 \in \mathbb{N}^*$ est tel que $\frac{1}{n_0} < x$, alors $f_n'(x) = 0$ pour tout $n \geq n_0$. Pour $x = 0$, $f_n'(0) = \varphi'(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$, $(f_n'(x))_n$ tend vers $0 = f'(x)$. Autrement dit, $(f_n')_n$ converge simplement vers f'.

5. $\|f_n'\|_{\infty,[0,1]} = \sup_{x\in[0,\frac{1}{n}]} |\varphi'(nx)| = \sup_{y\in[0,1]} |\varphi'(y)| = \|\varphi'\|_{\infty,[0,1]} \neq 0$, sinon φ' serait la fonction nulle, donc φ serait constante, donc en fait nulle puisqu'elle est nulle en 1, ce qui est contraire aux hypothèses. Donc $(\|f_n'\|_{\infty,[0,1]})_n$ ne converge pas vers 0, donc $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction nulle qu'est f'.

Exercice 3.1. Par hypothèses, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\alpha_n| \leq M$. Pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n(x)| \leq Mx^n$, terme général d'une série convergente si $x < 1$, donc par comparaison, $(\sum_n u_n(x))$ converge absolument, donc converge dans ce cas. Pour $x = 1$, $u_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc là encore $(\sum_n u_n(x))$ converge. La série de fonctions converge donc simplement sur $[0, 1]$.

2.a. Si $x = 1$, $S(x) = 0$ par l'observation précédente. Si $x \in [0, 1[$,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n(1-x) = (1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = (1-x)\frac{x}{1-x} = x.$$

2.b. S n'est pas continue en 1 ($\lim_{x\to 1^-} S(x) = 1 \neq 0 = S(0)$), donc pas continue sur $[0, 1]$.

2.c. S n'est pas continue en 1^-, or chaque u_n l'est (polynomiale), donc par contraposée du théorème de continuité, la convergence n'est pas uniforme.

3.a. $\|u_n\|_{\infty,[0,1]} = \sup_{x\in[0,1]} |u_n(x)| = \max_{[0,1]} |u_n|$ (le sup est un max car $|u_n| : x \mapsto |\alpha_n|x^n(1-x)$ est polynomiale donc continue sur le *segment* $[0, 1]$). Étudions donc les variations de $|u_n|$. Elle est (infiniment) dérivable sur $[0, 1]$, de dérivée

$$|u_n|' : x \mapsto |\alpha_n| \left(nx^{n-1}(1-x) - x^n\right) = |\alpha_n|x^{n-1}(n-(n+1)x).$$

Si $\alpha_n = 0$, $|u_n|$ est la fonction nulle et on a fini. Sinon, $|u_n|'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, \frac{n}{n+1}]$, d'où le tableau de variation... En particulier, $\max_{[0,1]} |u_n| = \left|u_n\left(\frac{n}{n+1}\right)\right| = |\alpha_n| \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \times \frac{1}{n+1} = \frac{|\alpha_n|}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$, ce qu'on voulait.

3.b. $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-(n+1)} = \exp\left(-(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(-(n+1)\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = e^{-1+o(1)}$. Autrement dit,

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} e^{-1} \quad \text{et par suite} \quad \|u_n\|_\infty \underset{n\to\infty}{\sim} e^{-1}\frac{|\alpha_n|}{n}.$$

Ces suites étant positives, ceci entraîne que les séries $(\sum \|u_n\|_{\infty,[0,1]})$ et $(\sum e^{-1}\frac{|\alpha_n|}{n})$, ou encore $(\sum \frac{|\alpha_n|}{n})$, sont de même nature. Ainsi on a bien que $(\sum u_n)$ converge normalement sur $[0, 1]$ si et seulement si la série numérique $(\sum \frac{|\alpha_n|}{n})$ converge.

Exercice 4.1. Dessin.

4.2. La restriction de f_3 à $]-\pi, \pi]$ se prolonge en fonction de classe C^1 ($x \mapsto x^3$, en fait C^∞) sur $[-\pi, \pi]$, donc f_3 est C^1 par morceaux sur $[-\pi, \pi]$ et donc sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité. Elle est a fortiori C^0 par morceaux.

En π, $\lim\limits_{x\to\pi^+} f_3(x) = \lim\limits_{y\to(-\pi)^+}(f_3(y))$ (par 2π-périodicité) $= (-\pi)^3 = -\pi^3 \neq f_3(\pi) = \pi^3$, donc f_3 n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, et a fortiori pas C^1.

4.3. f_3 est C^1 par morceaux (et 2π-périodique) donc d'après le théorème de Dirichlet, sa série de Fourier converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $x \mapsto \frac{f_3(x^+)+f_3(x^-)}{2}$, qui coïncide avec f_3 en dehors de ses points de discontinuité et vaut 0 en ces points. Cette fonction n'étant pas continue, la convergence ne peut être uniforme, et a fortiori pas normale.

4.6. f_0 est la fonction constante égale à 1. C'est un polynôme trigonométrique. On peut donc dire directement que $a_0(f_0) = 2 \times 1 = 2$ et $a_n(f_0) = b_n(f_0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4.5. Soient n et $p \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned} a_n(f_p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^p \cos(nt)dt &= \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\left[t^p\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \int_{-\pi}^{\pi} pt^{p-1}\frac{\sin(nt)}{n}dt\right) \quad \text{par IPP} \\ &= -\frac{p}{n}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^{p-1}\sin(nt)\,dt\right) = -\frac{p}{n}b_n(f_{p-1}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
b_n(f_p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^p \sin(nt)dt &= \frac{1}{\pi}\left(\left[t^p\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} pt^{p-1}\frac{\cos(nt)}{n}dt\right) \quad \text{par IPP} \\
&= \frac{1}{\pi n}\left(-\pi^p\cos(n\pi) + (-\pi)^p \underbrace{\cos(-n\pi)}_{=\cos(n\pi)=(-1)^n}\right) + \frac{p}{n}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^{p-1}\cos(nt)\,dt\right) \\
&= \frac{\pi^{p-1}(-1)^n}{n}\left((-1)^p - 1\right) + \frac{p}{n}a_n(f_{p-1}).
\end{aligned}$$

4.6. Les deux questions précédentes donnent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f_3) = \frac{2(-1)^{n+1}\pi^2}{n} + \frac{3}{n}a_n(f_2)$ avec $a_n(f_2) = (-\frac{2}{n})b_n(f_1) = (-\frac{2}{n})\left(\frac{2(-1)^{n+1}}{n} + 0\right)$, ce qui donne le résultat voulu.

4.7. Sur $]-\pi,\pi[$, f_3 coïncide avec une fonction impaire, donc les $a_n(f_3)$ sont tous nuls.

4.8. *Théorème de Parseval :* Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors ($\|f - S_n(f)\|_2 \to 0$, où $S_n(f)$ désigne la somme partielle à l'ordre n de la série de Fourier de f, et)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2).$$

Pour $f = f_3$, $a_0(f_3) = 0$ et on obtient :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_3(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^7}{7}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^6}{7} = 0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(0 + b_n(f_3)^2\right)$$

Soit

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi^6}{7} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2(-1)^{n+1}\pi^2}{n} + \frac{12(-1)^n}{n^3}\right)^2 \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4\pi^4}{n^2} + 2\frac{2(-1)^{n+1}\pi^2}{n} \times \frac{12(-1)^n}{n^3} + \frac{144}{n^6}\right) \\
&= 4\pi^4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - 48\pi^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} + 144\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} \quad \text{(les trois séries sont convergentes)}
\end{aligned}$$

ce qui donne finalement

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{1}{144}\left(\frac{2\pi^6}{7} - 4\pi^4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} + 48\pi^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}\right).$$