Université Grenoble Alpes
MAT 402

Licence Sciences et Technologies
Année 2018-2019

Examen du 22 mai 2019

Durée de l'épreuve : 2h

Documents, calculatrices, et téléphones portables sont interdits.
La clarté de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.
Les exercices sont indépendants.

***Le sujet est long**, le barème (indicatif) en tient compte :*
Exercice 1 sur 3,5 points, Exercice 2 sur 5 points,
Exercice 3 sur 6,5 points, Exercice 4 sur 9 points

Exercice 1.

1. On considère la série entière $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\frac{\pi}{3}}}{n^2} z^n\right)$.
   (a) Déterminer son rayon de convergence R.
   (b) Quel est le plus grand domaine complexe $D \subseteq \mathbb{C}$ sur lequel elle converge simplement ?
2. On considère maintenant la série entière $\left(\sum_{n\geq 0} (3n+1) z^{3n+1}\right)$.
   (a) Déterminer son rayon de convergence R'.
   (b) Calculer sa somme sur $]-R', R'[$, en justifiant les étapes.

Exercice 2. Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ non identiquement nulle telle que $\varphi(1) = \varphi'(1) = \varphi'(0) = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{\varphi(nx)}{n} \text{ si } x \in [0, \tfrac{1}{n}] \quad \text{et} \quad f_n(x) = 0 \text{ si } x \in]\tfrac{1}{n}, 1].$$

1. Dessiner le graphe d'une fonction φ satisfaisant les hypothèses ci-dessus (aucune formule n'est demandée). Pour cette fonction φ, dessiner le graphe de la fonction f_2 associée.

Dorénavant, φ est une fonction **quelconque** satisfaisant les hypothèses de l'énoncé.

2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction f à déterminer (on pourra utiliser, en le justifiant, le fait que φ est bornée sur $[0,1]$).
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et exprimer $f_n'(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.
4. Montrer que $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers f' sur $[0,1]$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\|f_n'\|_{\infty,[0,1]}$ en termes de φ'. La convergence de $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle uniforme sur $[0,1]$?

Exercice 3. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite bornée de nombres réels. Pour tout $n \geq 1$, on définit

$$\begin{array}{rccl} u_n : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \alpha_n x^n (1-x). \end{array}$$

On étudie la convergence de la série de fonctions $\left(\sum_{n\geq 1} u_n\right)$. On note S sa somme.

1. **Convergence simple.** Montrer que la série de fonctions $\left(\sum_{n\geq 1} u_n\right)$ converge simplement sur $[0,1]$.
2. **Un cas très particulier.** On suppose que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite constante égale à 1.
   (a) Calculer $S(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.
   (b) La fonction S est-elle continue sur $[0,1]$?
   (c) La convergence de $\left(\sum_{n\geq 1} u_n\right)$ est-elle uniforme sur $[0,1]$?
3. **Convergence normale.**
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|u_n\|_{\infty,[0,1]} = \frac{|\alpha_n|}{n}(\frac{n}{n+1})^{n+1}$.
   (b) En déduire qu'il y a convergence normale de $\left(\sum_{n\geq 1} u_n\right)$ sur $[0,1]$ si et seulement si la série numérique $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{|\alpha_n|}{n}\right)$ converge.

Exercice 4. (Vers le calcul des $\zeta(2p)$) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note f_p la fonction 2π-périodique telle que pour tout $x \in]-\pi,\pi]$, $f_p(x) = x^p$ (en particulier, pour tout $x \in]-\pi,\pi]$, $f_0(x) = 1$). On rappelle que les coefficients de Fourier réels de f sont

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t.$$

1. Tracer l'allure des graphes de f_0 et de f_3 sur $[-3\pi, 3\pi]$.
2. La fonction f_3 est-elle continue ? de classe $\mathcal{C}^1$? continue par morceaux ? de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux ? Justifier.
3. Justifier que la série de Fourier de f_3 converge simplement sur $\mathbb{R}$. Quelle est sa somme ? La convergence est-elle normale ? (Justifier.)
4. Déterminer $a_n(f_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $b_n(f_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,
$$a_n(f_p) = -\frac{p}{n}\, b_n(f_{p-1}),$$
$$b_n(f_p) = (-1)^n\frac{\pi^{p-1}}{n}\,((-1)^p - 1) + \frac{p}{n}\, a_n(f_{p-1}).$$
6. À l'aide des questions précédentes, vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f_3) = \frac{2(-1)^{n+1}\pi^2}{n} + \frac{12(-1)^n}{n^3}$.
7. Justifier sans calcul que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f_3) = 0$.
8. Énoncer le théorème de Parseval. En déduire une expression de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}$ en fonction de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ et de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$.