Feuille 2 : sphères, tores, projectifs

Correction

Exercice 1. 1. Tout d'abord, l'application ϕ_N est bien définie de $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ dans $\mathbb{R}^n$. En effet, N est l'unique point de la sphère de dernière coordonnée égale à 1 (ceci et l'équation de la sphère entraînant automatiquement que toutes les autres coordonnées sont nulles), donc pour tout $X = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$, le vecteur $\overrightarrow{NX} = (x_1, \dots x_n, x_{n+1} - 1)$ n'appartient pas à l'hyperplan vectoriel $\mathbb{R}^n \times \{0\}$, donc la droite (NX) n'est pas parallèle à l'hyperplan affine $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ et l'intersecte donc en un unique point $(y_1, \dots, y_n, 0)$. On pose alors $\phi_N(X) = (y_1, \dots, y_n)$. Idem pour ϕ_S.

Nous allons maintenant montrer que ϕ_N définit une bijection de $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ dans $\mathbb{R}^n$, et nous obtiendrons au passage son expression et celle de son inverse dans les coordonnées standard de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement. Ces applications apparaîtrons alors comme restrictions d'applications continues entre (ouverts de) $\mathbb{R}^{n+1}$ et $\mathbb{R}^n$. On conclura alors quant à leur continuité avec le critère suivant : pour toute application continue $f : X \to Y$ et parties A et B de X et Y telles que $f(A) \subset B$, l'application $g : A \to B$ qui envoie x sur $f(x)$ est continue si A et B sont munis de la topologie induite.

Pour tout $X = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ (de sorte que $x_{n+1} \neq 1$) et tout $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
y = \phi_N(X) &\Leftrightarrow Y = (y, 0) \in (NX) \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{NY} = \lambda \overrightarrow{NX} \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ (y_1, \dots, y_n, -1) = \lambda(x_1, \dots x_n, x_{n+1} - 1) \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ y_i = \lambda x_i \text{ et } -1 = \lambda(x_{n+1} - 1) \\
&\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ y_i = \frac{x_i}{1 - x_{n+1}} \quad (*).
\end{aligned}$$

Ceci nous donne déjà l'expression de ϕ_N en coordonnées :

$$\phi_N(x_1, ..., x_{n+1}) = (y_1, ..., y_n) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, ..., x_n)$$

et sa continuité, ses composantes étant des fonctions rationnelles (bien définies au voisinage de $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$) des coordonnées de X. Poursuivons alors notre série de propositions équivalentes en commençant par leur adjoindre une propriété toujours vraie puisque X est supposé appartenir à la sphère :

$$\begin{aligned}
(*) &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ y_i = \frac{x_i}{1 - x_{n+1}} \text{ et } \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \\
&\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = (1 - x_{n+1}) y_i \text{ et } \sum_{i=1}^{n+1} y_i^2 (1 - x_{n+1})^2 + x_{n+1}^2 = 1 \\
&\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = (1 - x_{n+1}) y_i \text{ et } \|y\|^2 = \frac{1 - x_{n+1}^2}{(1 - x_{n+1})^2} = \frac{1 + x_{n+1}}{1 - x_{n+1}} = -1 + \frac{2}{1 - x_{n+1}} \\
&\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = (1 - x_{n+1}) y_i \text{ et (petit calcul) } x_{n+1} = \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} \left(\text{et } 1 - x_{n+1} = \frac{2}{\|y\|^2 + 1} \right) \\
&\Leftrightarrow X = \frac{1}{\|y\|^2 + 1}(2y_1, \dots, 2y_n, \|y\|^2 - 1).
\end{aligned}$$

Comme ce dernier vecteur est bien de norme 1 et de dernière coordonnée différente de 1 pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on a donc montré que tout élément y de $\mathbb{R}^n$ possède un unique antécédent X dans

$\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ par ϕ_N, i.e. que ϕ_N définit une bijection de $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ dans $\mathbb{R}^n$, et que sa bijection réciproque a pour expression en coordonnées :

$$\phi_N^{-1}(y_1, ..., y_n) = \frac{1}{\|y\|^2 + 1}(2y_1, \ldots, 2y_n, \|y\|^2 - 1). \qquad (**)$$

Celle-ci est continue par le même argument que pour ϕ_N, ce qui achève la preuve du fait que ϕ_N définit un homéomorphisme entre $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ et $\mathbb{R}^n$. Pour ϕ_S entre $\mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ et $\mathbb{R}^n$, on peut répéter le même argument en changeant quelques signes, ou encore remarquer que, si σ désigne la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, qui induit un homéomorphisme entre $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ et $\mathbb{S}^n \setminus \{S\}$, $\phi_S = \phi_N \circ \sigma$, donc par composition ϕ_S définit un homéomorphisme entre $\mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ et $\mathbb{R}^n$, avec

$$\phi_S(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \phi_N(x_1, \ldots, -x_{n+1}) = \frac{1}{1 + x_{n+1}}(x_1, ..., x_n)$$

et

$$\phi_S^{-1}(y_1, ..., y_n) = (\sigma^{-1} \circ \phi_N^{-1})(y_1, ..., y_n) = \frac{1}{\|y\|^2 + 1}(2y_1, \ldots, 2y_n, 1 - \|y\|^2).$$

2. Ainsi, $\phi_N : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ et $\phi_S : \mathbb{S}^n \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^n$ sont deux cartes. Leurs domaines recouvrent la sphère. Ils s'intersectent en $U = \mathbb{S}^n \setminus \{N, S\}$. Les applications de changement de carte envoient $\phi_N(U) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sur $\phi_S(U) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et réciproquement. On déduit des formules précédentes leurs expressions en coordonnées

$$\phi_S \circ \phi_N^{-1}(y) = \frac{y}{\|y\|^2}, \qquad \phi_N \circ \phi_S^{-1}(y) = \frac{y}{\|y\|^2}.$$

Les applications ainsi définies (une seule à vrai dire, c'est une involution de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) sont lisses, donc les cartes sont compatibles, et définissent donc bien un atlas différentiable de la sphère.

3. D'après $(**)$, l'expression de $i : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ dans la carte $(\mathbb{S}^n \setminus \{N\}, \phi_N, \mathbb{R}^n)$ est

$$i \circ \phi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}, \qquad (y_1, \ldots, y_n) \mapsto (1 + \|y\|^2)^{-1}(2y_1, \ldots, 2y_n, \|y\|^2 - 1).$$

Elle est de classe C^∞, et il en est de même pour l'expression de i dans la carte obtenue par projection stéréographique par rapport au pôle sud. Par conséquent i est C^∞ pour la structure différentiable définie par cet atlas.

Soit $f : X \to \mathbb{S}^n$. Si f est lisse, $i \circ f$ l'est aussi comme composée d'applications lisses (cf. exercice 2). Supposons maintenant que $i \circ f$ est lisse et montrons que f est de classe C^∞. Cela équivaut à montrer (s'en convaincre !) que $\phi_N \circ f$ et $\phi_S \circ f$ sont C^∞ sur les ouverts $f^{-1}(\mathbb{S}^n \setminus \{N\})$ et $f^{-1}(\mathbb{S}^n \setminus \{S\})$ (ce sont bien des ouverts car $i \circ f$ est lisse donc continue et donc f est continue par définition de la topologie induite). Or d'après $(*)$, $\phi_N = \Phi_N \circ i$ où Φ_N est l'application lisse de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{x_{n+1} = 1\}$ dans $\mathbb{R}^n$

$$(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (1 - x_{n+1})^{-1}(x_1, \ldots, x_n).$$

Et $i \circ f$ C^∞ implique que $\phi_N \circ f = \Phi_N \circ (i \circ f)$ est C^∞ par composition. On raisonne de la même façon pour la deuxième carte.

Enfin, l'inclusion de $\mathbb{R}^{p+1}$ dans $\mathbb{R}^{p+n+1}$ étant C^∞, sa composition j avec l'injection $\mathbb{S}^p \to \mathbb{R}^{p+1}$ l'est aussi. L'image de j étant incluse dans $\mathbb{S}^{n+p}$, elle est de la forme $j = i \circ f$ où i est l'injection $\mathbb{S}^{n+p} \to \mathbb{R}^{p+n+1}$ et $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^{n+p}$. D'après ce qui précède, f est une application C^∞ de $\mathbb{S}^p$ dans $\mathbb{S}^{n+p}$, et c'est clairement une injection.

4. Deux atlas définissent la même structure différentiable si leur union est encore un atlas différentiable, ce qui équivaut à dire que leurs cartes sont mutuellement compatibles. Une première façon de répondre à la question est de montrer que les projections stéréographiques et

les cartes définies par restrictions de difféomorphismes de redressements (qui définissent la structure différentiable sur $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ induite par celle de $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{S}^n$ étant une sous-variété lisse) sont compatibles, au sens où les changements de cartes sont lisses. Pour cela, on peut en fait montrer que les projections stéréographiques sont elles-mêmes des restrictions de difféomorphismes de redressement, et sont donc automatiquement compatibles avec les autres, mais cela demande de construire ces difféomorphismes de redressement. On peut aussi procéder à la main en montrant que pour toute carte ϕ de l'atlas de sous-variété, $\phi_{N,S} \circ \phi^{-1}$ et $\phi \circ \phi_{N,S}^{-1}$ sont des applications C^∞ entre ouverts de $\mathbb{R}^n$, avec des arguments similaires à ceux de la question précédente, en utilisant le fait que $\phi_{N,S}$ et $\phi_{N,S}^{-1}$ sont des restrictions (à la source et au but respectivement) d'applications lisses entre ouverts de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $\mathbb{R}^n$.

Pour éviter les redites, une autre façon consiste à utiliser la question précédente et l'équivalence suivante $(*)$, que l'on démontrera en fin de question : deux atlas définissent la même structure différentiable sur une variété M si et seulement si, pour toute variété lisse X, les applications $f : X \to M$ lisses pour l'un des atlas et celles lisses pour l'autre sont les mêmes.

D'après la question précédente, on sait que les applications $f : X \to \mathbb{S}^n$ lisses pour l'atlas par projections stéréographiques sont exactement celles telles que $i \circ f : X \to \mathbb{R}^{n+1}$ est lisse. Il s'agit de vérifier que c'est aussi le cas pour l'atlas de sous-variété. C'est un fait général à retenir, vrai pour toute sous-variété M de dimension k de $\mathbb{R}^m$. Là encore, l'argument est très similaire à ce qu'on a fait dans la question précédente. On montre d'abord que l'inclusion $i : M \to \mathbb{R}^m$ est lisse, i.e. qu'elle l'est *lue dans les cartes*. Soit ϕ une carte de l'atlas de sous-variété, donc la restriction à $M \cap U$ d'un difféomorphisme de redressement $\Phi : U \to \Phi(U)$ entre ouverts de $\mathbb{R}^m$ satisfaisant $\Phi(M \cap U) = \Phi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) = V$. Alors $i \circ \phi^{-1} = (\Phi^{-1})_{|V}$, qui est lisse comme restriction à un sous-espace vectoriel d'une application lisse entre ouverts d'espaces vectoriels. Ainsi, i est lisse donc par composition, si $f : X \to \mathbb{S}^n$ est lisse (pour l'atlas de sous-variété), $i \circ f$ l'est. Voyons la réciproque : on suppose $i \circ f$ lisse, et on veut montrer que f est lisse, ce qui équivaut à montrer que pour toute carte ϕ de l'atlas de sous-variété (avec les notations ci-dessus), $\phi \circ f$ est lisse sur son ouvert de définition. Mais $\phi \circ f = \Phi \circ i \circ f$, qui est lisse par composition et par hypothèse.

Montrons enfin l'équivalence $(*)$. L'implication directe découle directement de la définition d'application lisse entre variétés. Montrons la réciproque. Soient ϕ et ψ des cartes de chacun des atlas. Chacune est lisse et d'inverse lisse *pour la structure différentiable définie par l'atlas auquel elle appartient* (justifier ?) mais alors d'après l'hypothèse, leurs inverses sont aussi lisses pour l'autre structure différentiable. Ainsi $\phi \circ \psi^{-1}$ est la composée d'une application lisse d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans un ouvert de M et d'une application lisse d'un ouvert de M dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$, *les deux pour la même structure différentiable sur* M, donc cette composée est lisse. De même pour $\psi \circ \phi^{-1}$. Les cartes des deux atlas sont donc compatibles.

Exercice 2. Quelques résultats théoriques. (rébarbatif mais nécessaire...) 1. On suppose $f : M^m \to N^n$ et $g : N^n \to P^p$ différentiables. Soit $x \in M$. Notons $y = f(x)$ et $z = (g \circ f)(x)$. Soient $\phi_x : U_x \subset M \to V_x \subset \mathbb{R}^m$ une carte de M en x, $\phi_y : U_y \subset N \to V_y \subset \mathbb{R}^n$ une carte de N en y, et $\phi_z : U_z \subset P \to V_z \subset \mathbb{R}^p$ une carte de P en z. Quitte à restreindre U_y et U_x, on suppose que $g(U_y) \subset U_z$ et $f(U_x) \subset U_y$, de sorte que $\phi_y \circ f \circ \phi_x^{-1}$ et $\phi_z \circ g \circ \phi_y^{-1}$ sont bien définies de V_x dans V_y et de V_y dans V_z respectivement. Comme f et g sont supposées lisses, les deux applications précédentes, entre ouverts de $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$, le sont aussi par définition de la lissité d'applications entre variétés. Mais alors leur composée

$$(\phi_z \circ g \circ \phi_y^{-1}) \circ (\phi_y \circ f \circ \phi_x^{-1})(\phi_z \circ (g \circ f) \circ \phi_x^{-1}) =: V_x \to V_z$$

l'est aussi (on suppose connus les résultats sur les composes de fonctions lisses entre ouverts d'espaces euclidiens !). Donc $g \circ f$ est lisse au voisinage de x par définition. Ceci étant vrai pour tout $x \in M$, cela conclut la preuve de la lissité de la composée $g \circ f$.

2. Il s'agit de montrer que pour tout $x \in M^k \subset \mathbb{R}^n$, il existe une carte $\phi : U \subset M \to V \subset \mathbb{R}^k$ de M au voisinage de x telle que $f \circ \phi^{-1} : V \to \mathbb{R}^p$ soit différentiable. Soit $x \in M$ et $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme de redressement de M au voisinage de x, de sorte que $\phi : p \in U = \Omega \cap M \mapsto \Phi(p) \in \Omega' \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ (qui s'identifie à un ouvert V de $\mathbb{R}^k$) définit une carte de l'atlas de sous-variété de M. Alors $f \circ \phi^{-1}$ est la restriction à un sous-espace vectoriel de l'application $f \circ \Phi^{-1}$, lisse comme composée d'applications lisses entre ouverts d'espaces vectoriels. Elle est donc elle-même lisse (se restreindre à un sous-espace vectoriel revient à composer avec l'inclusion du sous-espace dans l'espace, qui est linéaire donc lisse). CQFD.

3. Soit $x \in U$ et $y = f(x) \in M^k \subset \mathbb{R}^p$. Il s'agit de vérifier qu'il existe une carte $\phi : V \subset M \to W \subset \mathbb{R}^k$ de M au voisinage de y telle que $\phi \circ f : f^{-1}(V) \to \mathbb{R}^k$ soit différentiable. Soit $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme de redressement de M au voisinage de y, de sorte que $\phi : p \in V = \Omega \cap M \mapsto \Phi(x) \in \Omega' \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ (qui s'identifie à un ouvert W de $\mathbb{R}^k$) définit une carte de l'atlas de sous-variété de M. Alors $\phi \circ f$ est la composée de l'application $\Phi \circ f$ lisse entre ouverts d'espaces vectoriels avec la projection de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^k$ sur les k premières coordonnées, qui est linéaire donc lisse. CQFD.

Exercice 2. 1. Soit $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ l'application lisse (car polynomiale en les coordonnées) $(x, y) \mapsto \|x\|^2 - \|y\|^2$, et $Q = f^{-1}(\{1\})$ (i.e. la quadrique d'équation $\|x\|^2 - \|y\|^2 = 1$). La jacobienne de f en (x, y) est $(2x, -2y) = (2x_1, ..., 2x_n, -2y_1, ..., -2y_p)$, qui n'est nulle que pour $(x, y) = (0, 0)$. Or $f(0, 0) = 0 \neq 1$ donc $(0, 0) \notin Q$. Autrement dit, 1 est une valeur régulière de la fonction f, donc $Q = f^{-1}(\{1\})$ est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^{n+p}$ de codimension 1, i.e. une hypersurface.

Pour tout $(x, y) \in Q$, $\|x\|^2 = 1 + \|y\|^2 > 0$ donc l'application

$$\begin{array}{rccc} \phi : & Q \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^p \\ & (x, y) & \mapsto & (\frac{x}{\|x\|}, y) \end{array}$$

est bien définie. Par définition de la structure différentiable induite sur une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+p}$ (resp. $\mathbb{R}^n$), cf. exercice précédent, ϕ est lisse comme restriction à Q à la source et à $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^p$ au but de l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \\ & (x, y) & \mapsto & (\frac{x}{\|x\|}, y) \end{array}$$

lisse (entre ouverts d'espaces euclidiens) car rationnelle en les coordonnées.

Soient $(u, v) \in \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^p$ et $(x, y) \in Q$, donc satisfaisant $\|x\|^2 - \|y\|^2 = 1$, ou encore $\|x\| = \sqrt{1 + \|y\|^2}$. On a

$$\begin{aligned} (u, v) = \phi(x, y) &\Leftrightarrow (u, v) = (\tfrac{x}{\|x\|}, y) \\ &\Leftrightarrow v = y \text{ et } u = \tfrac{x}{\|x\|} = \tfrac{x}{\sqrt{1+\|y\|^2}} = \tfrac{x}{\sqrt{1+\|v\|^2}} \\ &\Leftrightarrow (x, y) = (u\sqrt{1 + \|v\|^2}, v). \end{aligned}$$

$(u\sqrt{1 + \|v\|^2}, v)$ appartient bien à Q donc ϕ est bijective, d'inverse

$$\begin{array}{rccc} \phi^{-1} : & \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^p & \to & Q \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \\ & (u, v) & \mapsto & (u\sqrt{1 + \|v\|^2}, v)' \end{array}$$

qui est lisse par un argument similaire à celui utilisé pour ϕ. ϕ est donc un difféomorphisme entre les sous-variétés Q et $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^p$.

Exercice 4. (Ruban de Mobius)

1. Toute classe d'équivalence $[(x,y)]$ de $\mathbb{R}\times]-1,1[/\mathcal{R}$ admet au moins un représentant dans $[0,1]\times]0,1[$, par exemple $(x-E(x),(-1)^{E(x)}y)$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x. Deux représentants dans $[0,1]\times]0,1[$ sont en relation avec $\sim$. La surface ainsi obtenue est le ruban de Mobius.

2. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}\times]-1,1[$. Nous devons montrer que $p(U)$ est ouvert dans $\mathbb{R}\times]0,1[/\mathcal{R}$, c'est à dire que $p^{-1}[p(U)]$ est ouvert dans $\mathbb{R}\times]0,1[$. Ceci découle de l'égalité suivante et du fait que $\mathbb{Z}$ agit sur $\mathbb{R}\times]-1,1[$ par des homéomorphismes.

$$p^{-1}[p(U)] = \cup_{n\in\mathbb{Z}}\, n\cdot U.$$

3. Etant donné $[(x,y)],[(x',y')] \in \mathbb{R}\times]-1,1[/\mathcal{R}$. Nous supposerons (x,y) et (x',y') dans $[0,1]\times]-1,1[$. Cela revient à exhiber deux ouverts de $\mathbb{R}\times]-1,1[$, voisinages de (x,y) et (x',y'), d'intersection vide et invariants par l'action de $\mathbb{Z}$. Leur image par p séparera $[(x,y)]$ et $[(x',y')]$. Deux cas sont à distinguer.

   Premier cas : (x,y) *et* (x',y') *sont dans* $]0,1[\times]0,1[$. On prend V et W deux ouverts disjojnts de $]0,1[\times]0,1[$ séparant (x,y) et (x',y'). Alors $p(V)$ et $p(W)$ séparent $[(x,y)]$ et $[(x',y')]$ dans $\mathbb{R}\times]-1,1[/\mathcal{R}$.

   Deuxième cas : $(x,y)\in]0,1[\times]-1,1[$ *et* $(x',y')\in\{0\}\times]-1,1[$ On prend $V\subset]0,1[\times]-1,1[$ et $W\subset]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[\times]-1,1[$ deux ouverts disjoints séparant (x,y) et (x',y'). Alors $p(V)$ et $p(W)$ séparent $[(x,y)]$ et $[(x',y')]$ dans $\mathbb{R}\times]-1,1[/\mathcal{R}$.

   $\mathbb{R}\times]-1,1[$ étant localement compact et p étant continue, il en est de même de M. $\mathbb{R}\times]-1,1[$ étant à base dénombrable et p étant ouverte, il en est de même de M.

4. ϕ_1 et ϕ_2 sont des bijections continues et, comme p est ouverte, ce sont des homéomorphismes.

5. Prenons ϕ_1^{-1} et ϕ_2^{-1} pour cartes de l'atlas. Nous devons vérifier que $\phi_1^{-1}\circ\phi_2$ et $\phi_2^{-1}\circ\phi_1$ sont lisses. Calculons-les.

$$\begin{array}{rcl}\phi_1^{-1}\circ\phi_2 : (]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[-\{0\})\times]-1,1[& \to & (]0,1[-\{\frac{1}{2}\})\times]-1,1[\\ (x,y)\in]0,\frac{1}{2}[\times]0,1[& \to & (x,y)\\ (x,y)\in]-\frac{1}{2},0[\times]0,1[& \to & (x+1,-y)\end{array}$$

   et

$$\begin{array}{rcl}\phi_2^{-1}\circ\phi_1 : (]0,1[-\{\frac{1}{2}\})\times]-1,1[& \to & (]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[-\{0\})\times]-1,1[\\ (x,y)\in]0,\frac{1}{2}[\times]0,1[& \to & (x,y)\\ (x,y)\in]\frac{1}{2},1[\times]0,1[& \to & (x-1,-y).\end{array}$$

   Les changements de cartes sont bien lisses.

Exercice 4. 1. Ici (avec les notations des rappels sur la topologie quotient), X est $\mathbb{R}$ et la relation $\sim$ est : $x\sim y \Leftrightarrow x-y\in\mathbb{Z}$. $\mathbb{T}^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est l'image par p, continue, d'un ensemble connexe ($\mathbb{R}$), donc est connexe. En outre, si on note $[x]$ la classe modulo $\mathbb{Z}$ d'un réel x et $E(x)$ sa partie entière, pour tout réel x, $[x]=[x-E(x)]$ et $x-E(x)\in[0,1[$ donc $\mathbb{T}^1=p([0,1[)$ et a fortiori $\mathbb{T}^1=p([0,1])$. Donc $\mathbb{T}^1$ est l'image d'un compact par une application continue. Si l'on montre que $\mathbb{T}^1$ est séparé, cela entraînera qu'il est compact.

Considérons donc deux éléments distincts de $\mathbb{T}^1$, i.e. de la forme $[x]$ et $[y]$ avec $x,y\in\mathbb{R}$ et $x-y\notin\mathbb{Z}$. Soient U et V des ouverts de $\mathbb{T}^1$ contenant $[x]$ et $[y]$ respectivement. Alors $U'=p^{-1}(U)$ et $V'=p^{-1}(V)$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$ (contenant respectivement x et y) invariants par translation entière :

$$z\in U' \Leftrightarrow p(z)\in U \Leftrightarrow \forall k\in\mathbb{Z}, p(z+k)\in U \Leftrightarrow \forall k\in\mathbb{Z}, z+k\in U',$$

et

$$U\cap V=\varnothing \Leftrightarrow p^{-1}(U\cap V)=\varnothing \Leftrightarrow p^{-1}(U)\cap p^{-1}(V)=\varnothing \Leftrightarrow U'\cap V'=\varnothing.$$

Il suffit donc, pour construire deux ouverts disjoints de $\mathbb{T}^1$ contenant respectivement $[x]$ et $[y]$, de construire deux ouverts disjoints U' et V' de $\mathbb{R}$ invariants par translation entière et contenant respectivement x et y. Pour cela, posons

$$\delta = \frac{1}{2} \inf_{x' \in [x], y' \in [y]} |x' - y'| = \frac{1}{2} \inf_{k,l \in \mathbb{Z}} |x + k - (y + l)| = \frac{1}{2} \inf_{n \in \mathbb{Z}} |(x - y) - n| = \frac{1}{2} d(x - y, \mathbb{Z}) > 0$$

car $x - y \notin \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. Alors

$$U' = \bigcup_{x' \in [x]}]x' - \delta, x' + \delta[\quad \text{et} \quad V' = \bigcup_{x' \in [x]}]x' - \delta, x' + \delta[$$

conviennent. $\mathbb{T}^1$ est donc bien séparé.

2. La restriction de p à $]0, 1[$ est injective, donc induit une application bijective (et continue car p l'est) de $]0, 1[$ dans $p(]0, 1[) = \mathbb{T}^1 \setminus \{p(0)\} =: U$, qui est un ouvert de $\mathbb{T}^1$ (puisque complémentaire d'un point dans un espace séparé). Notons $\varphi_{]0,1[}$ son inverse, qui à une classe dans U associe l'unique représentant de cette classe dans $]0, 1[$. $\varphi_{]0,1[}$ est continue ssi $\varphi_{]0,1[} \circ p : p^{-1}(U) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \to]0, 1[$ l'est par définition de la topologie quotient. Mais la restriction de cette application à chaque composante connexe $]k, k + 1[$, $k \in \mathbb{Z}$, de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ n'est autre que la translation $x \mapsto x - k$, qui est continue, et même lisse, ce qui servira plus tard. Donc $\varphi_{]0,1[} \circ p$ est continue et donc $\varphi_{]0,1[}$ aussi. Finalement, $\varphi_{]0,1[} : U \to]0, 1[$ définit bien une carte de $\mathbb{T}^1$.

En raisonnant de même pour la restriction de p à $]1/2, 3/2[$, on obtient une seconde carte $\varphi_{]1/2,3/2[} : V = \mathbb{T}^1 \setminus \{p(1/2)\} \to]1/2, 3/2[$. Les deux domaines de cartes recouvrent le tore. L'application de changement de carte

$$\varphi_{]1/2,3/2[} \circ \varphi_{]0,1[}^{-1} : \varphi_{]0,1[}(U \cap V) \to \varphi_{]1/2,3/2[}(U \cap V),$$

qui à un élément du premier ouvert associe l'unique élément du second qui lui est égal modulo $\mathbb{Z}$, est

$$]0, 1/2[\cup]1/2, 1[\to]1/2, 1[\cup]1, 3/2[, \quad x \mapsto \begin{cases} x \text{ si } x \in]1/2, 1[\\ x + 1 \text{ si } x \in]0, 1/2[. \end{cases}$$

C'est un difféomorphisme. Les deux cartes forment donc un atlas différentiable.

3. On a déjà vu que l'application $\varphi_{]0,1[} \circ p$ exprimant la projection $p : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^1$ dans la première carte était lisse sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Il en est de même pour $\varphi_{]1/2,3/2[} \circ p$ sur $\mathbb{R} \setminus (\frac{1}{2} + \mathbb{Z})$, sa restriction à chaque composante connexe $]k + 1/2, k + 3/2[$, $k \in \mathbb{Z}$, valant à nouveau $x \mapsto x - k$. Ainsi, p est lisse sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Par conséquent, si $f : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ est lisse, $f \circ p$ l'est aussi par composition. Vérifions la réciproque. Supposons $f \circ p$ lisse. L'expression de f dans la première carte de $\mathbb{T}^1$ est $f \circ \varphi_{]0,1[}^{-1}$, qui n'est autre autre que la restriction de $f \circ p$ à $]0, 1[$, donc de classe C^∞. Il en est de même pour l'expression de f dans la deuxième carte. f est donc lisse.

4. Soit Ψ l'application lisse $x \in \mathbb{R} \mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)) \in \mathbb{S}^1$ (lisse car restriction au but d'une application lisse de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$). On a

$$\Psi(x) = \Psi(x') \Leftrightarrow p(x) = p(x')$$

donc Ψ se factorise de façon unique en une application injective $\psi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{S}^1$ satisfaisant $\psi \circ p = \Psi$. Comme Ψ est surjective, ψ l'est également, donc ψ est en fait bijective. Comme $\Psi = \psi \circ p$ est lisse, ψ l'est aussi d'après la question précédente. Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $d\Psi_x : \mathbb{R} \to T_{\Psi(x)}\mathbb{S}^1$ envoie 1 sur $\Psi'(x) = 2\pi(-\sin(2\pi x), \cos(2\pi x)) \neq (0, 0)$ donc est de rang supérieur ou égal à 1, donc surjective puisque $T_{\Psi(x)}\mathbb{S}^1$ est de dimension 1. Mais alors comme $d\Psi_x = d\psi_{p(x)} \circ dp(x)$, $d\psi_{p(x)}$ est elle aussi surjective, donc inversible car entre espaces de même dimension. Ceci étant

vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, par le théorème d'inversion locale, ψ est un difféomorphisme local, et ψ étant en outre bijective, ψ est un difféomorphisme entre $\mathbb{T}^1$ et $\mathbb{S}^1$.

Exercice 6. 1. Tout vecteur non nul de $\mathbb{R}^{n+1}$ est colinéaire à un vecteur unitaire, donc la projection $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ satisfait $p(\mathbb{S}^n) = \mathbb{R}\mathrm{P}^n$. Or $\mathbb{S}^n$ est compact et connexe et p est continue donc $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ est connexe et pour montrer qu'il est compact il suffit de montrer qu'il est séparé. Soient x et y deux éléments distincts de $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, donc images de deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^{n+1}$ non colinéaires. Comme dans l'exercice 4, pour trouver deux voisinages disjoints U et V de x et y, il suffit de trouver deux ouverts de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, U' et V', saturés pour la relation d'équivalence et contenant respectivement u et v, donc en fait $\mathbb{R}u \setminus \{0\}$ et $\mathbb{R}v \setminus \{0\}$, et de poser $U = p(U')$ et $V = p(V')$. Les droites $\mathbb{R}u$ et $\mathbb{R}v$ sont distinctes par hypothèse. Notons θ l'angle (non orienté) strictement positif entre ces droites. Alors $U' = \{u' \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \langle (u', u) < \theta/2\}$ et $V' = \{v' \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \langle (v', v) < \theta/2\}$ conviennent.

2. Pour tout i entre 0 et n, V_i est un ouvert de $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ car $p^{-1}(V_i) = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{x_i = 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ comme complémentaire d'un fermé, et par définition de la topologie quotient. L'application $\varphi_i : V_i \to \{x_i = 1\}$ est bien définie sur V_i (toute droite vectorielle de $\mathbb{R}^{n+1}$ non incluse dans $\{x_i = 0\}$ intersecte l'hyperplan affine $\{x_i = 1\}$ en un unique point) et bijective (par tout point de $\{x_i = 1\}$, nécessairement différent de 0, passe une unique droite vectorielle non incluse dans $\{x_i = 0\}$). Son expression en coordonnées homogènes est :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_i : & V_i & \to & \{x_i = 1\} \\ & [x_0 : \cdots : x_n] & \mapsto & (\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}) \end{array}$$

ou encore, après identification canonique

$$\iota : (x_0, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \{x_i = 1\} \mapsto (x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\begin{array}{rccc} \varphi_i : & V_i & \to & \mathbb{R}^n \\ & [x_0 : \cdots : x_n] & \mapsto & (\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}) \end{array}$$

où le chapeau signifie qu'on omet le terme correspondant. Autrement dit, ϕ_i est obtenue par passage au quotient de l'application :

$$\begin{array}{rccc} \Phi_i : & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{x_i = 0\} & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x_0, \ldots, x_n) & \mapsto & (\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}). \end{array}$$

Cette application est continue (composantes rationnelles) donc φ_i l'est par définition de la topologie quotient. Son inverse est l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi_i^{-1} = p \circ \iota^{-1} : & \mathbb{R}^n & \to & V_i \\ & (y_1, \ldots, y_n) & \mapsto & [y_1 : \cdots : y_{i-1} : 1 : y_i : \cdots : y_n], \end{array}$$

continue par composition, ce qui montre que $\varphi_i : V_i \to \{x_i = 1\}$ est un homéomorphisme.

Puisque les V_i recouvrent $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ tout entier (aucun vecteur non nul de $\mathbb{R}^{n+1}$ n'appartient à tous les hyperplans $\{x_i = 0\}$, reste à vérifier que les changements de carte sont différentiables. Soient $i < j$ entre 0 et n. Pour tout $(y_1, \ldots, y_n) \in \varphi_i(V_i \cap V_j) = \mathbb{R}^n \setminus \{y_{j-1} = 0\}$ (à vérifier),

$$\begin{aligned} (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(y_1, \ldots, y_n) &= \varphi_j([y_1 : \cdots : y_{i-1} : 1 : y_i : \cdots : y_n]) \\ &= \left(\frac{y_1}{y_{j-1}}, \ldots, \frac{y_{i-1}}{y_{j-1}}, \frac{1}{y_{j-1}}, \frac{y_i}{y_{j-1}}, \ldots, \widehat{\frac{y_{j-1}}{y_{j-1}}}, \ldots, \frac{y_n}{y_{j-1}} \right) \end{aligned}$$

qui est bien lisse, et de façon similaire pour $j < i$. On a donc bien un atlas différentiable.

Notons que dans le cas où $n = 1$, φ_0 est l'application $[x_0 : x_1] \mapsto \frac{x_1}{x_0}$, φ_1 est l'application $[x_0 : x_1] \mapsto \frac{x_0}{x_1}$, et le changement de carte est $\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1} : y \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{y} \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 7. 1. *Méthode 1* (sans atlas). Puisque $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^1/\{\pm\mathrm{Id}\}$ d'après l'exercice précédent, il suffit de montrer que $\mathbb{S}^1$ et $\mathbb{S}^1/\{\pm\mathrm{Id}\}$ sont difféomorphes, donc déjà homéomorphes, et pour cela de trouver une surjection continue de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{S}^1$ qui passe au quotient en une bijection (toujours continue par définition de la topologie quotient, et automatiquement d'inverse continue par argument de compacité) de $\mathbb{S}^1/\{\pm\mathrm{Id}\}$ dans $\mathbb{S}^1$. L'application $h : z \in \mathbb{S}^1 \mapsto z^2 \in \mathbb{S}^1$ (en notations complexes, $\mathbb{R}^2$ étant identifié à $\mathbb{C}$) a toutes les propriétés requises (pour le passage au quotient : $h(x) = h(x') \Leftrightarrow x = \pm x'$). Elle est en outre lisse (en coordonnées cartésiennes, elle s'écrit $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$) et c'est une submersion (par exemple : c'est la restriction de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{S}^1$ d'un difféomorphisme local entre ouverts de $\mathbb{R}^2$, cf. première feuille de TD; ou encore, en coordonnées polaires, c'est l'application $\theta \mapsto 2\theta$, de différentielle non nulle). Notons $\bar{h} : \mathbb{S}^1/\{\pm\mathrm{Id}\} \to \mathbb{S}^1$ l'application induite, satisfaisant $\bar{h} \circ p = h$, où p est la projection $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1/\{\pm\mathrm{Id}\}$. On a déjà vu qu'elle était bijective. Elle est lisse car h l'est (cf. exercice précédent), sa différentielle est non nulle en tout point car celle de h l'est, et entre espaces de dimension 1, donc elle est inversible. Par inversion locale, on obtient bien que $\bar{h}$ est un difféomorphisme.

Méthode 2 (avec atlas). Comparer l'atlas de $\mathbb{S}^1$ par projections stéréographiques et l'atlas affine à deux cartes de $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ de l'exercice précédent. Voir que les cartes sont à valeur dans les mêmes ouverts de $\mathbb{R}$ et que les changements de cartes sont identiques. Conclure.

2. L'application $f : (x, y, z) \mapsto (x^2, y^2, z^2, xy, yz, xz)$ est lisse de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^6$ (polynomiale), donc de $\mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{R}^6$, et satisfait, pour tous (x, y, z) et $(x', y', z') \in \mathbb{S}^2$, $f(x, y, z) = f(x', y', z')$ si et seulement si $(x, y, z) = \pm(x', y', z')$. Elle passe donc au quotient en une application injective $\bar{f} : \mathbb{S}^2/\{\pm\mathrm{Id}\} \simeq \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \to \mathbb{R}^6$. Celle-ci est encore lisse puisque $\bar{f} = f \circ p$, où $p : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2/\{\pm\mathrm{Id}\}$ désigne la projection, et f est lisse (cf. exo 6). En outre, p est un difféomorphisme local (donc en particulier a une différentielle inversible en tout point). Donc par la formule sur la différentielle d'une composée, $\bar{f}$ est une immersion si et seulement si f en est une. Or pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$,

$$\mathrm{Jac}_{(x,y,z)} f = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 2z \\ y & x & 0 \\ 0 & z & y \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

Si $x \neq 0$, les trois colonnes sont linéairement indépendantes car le mineur formé des première, quatrième et sixième lignes :

$$\begin{vmatrix} 2x & 0 & 0 \\ y & x & 0 \\ z & 0 & x \end{vmatrix} = 2x^3$$

est non nul. De même si $y \neq 0$ ou $z \neq 0$ (les trois coordonnées jouent des rôles symétriques). Comme (x, y, z) appartient à $\mathbb{S}^2$, les trois coordonnées ne sont pas simultanément nulles, donc $Df_{(x,y,z)}$ est injective. f est donc bien une immersion. Reste à vérifier que $\bar{f}$ est un homéomorphisme sur son image mais c'est automatique pour une injection continue d'un compact dans un séparé.

Exercice 8. Étant donné un plan vectoriel P de $\mathbb{R}^{n+1}$, on construit facilement une bijection de $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ dans $\Delta = p_n(P \setminus \{0\})$, où p_n désigne la projection $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$: tout isomorphisme linéaire entre $\mathbb{R}^2$ et P passe au quotient en une telle bijection (le vérifier). Mais il faut montrer que cette bijection est un difféomorphisme.

Il suffit pour cela de se restreindre au cas particulier du plan $P_0 = \mathbb{R}^2 \times \{0_{\mathbb{R}^{n-1}}\}$. En effet, si P est un autre plan vectoriel de $\mathbb{R}^{n+1}$, il existe un automorphisme linéaire A de $\mathbb{R}^{n+1}$ envoyant $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ sur P. Cet automorphisme passe au quotient en un difféomorphisme de $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ envoyant $\Delta_0 = p_n((\mathbb{R}^2 \times \{0_{\mathbb{R}^{n-1}}\}) \setminus \{0_{\mathbb{R}^{n+1}}\})$ sur Δ. En effet, $f = p_n \circ A : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ est lisse par

composition et satisfait : $f(x) = f(x')$ si et seulement si $A(x)$ et $A(x')$ sont colinéaires, i.e. ssi x et x' sont colinéaires, i.e. ssi $p_n(x) = p_n(x')$. Elle passe donc au quotient en une application lisse injective $\phi_A : \mathbb{R}\mathrm{P}^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$, qui est en outre surjective var f l'est. Son inverse n'est autre que $\phi_{A^{-1}}$ (le vérifier), qui est elle aussi lisse, donc ϕ_A définit un difféomorphisme de $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ dans lui-même, qui par construction envoie bijectivement Δ_0 sur Δ. Donc si Δ_0 est une sous-variété de $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ difféomorphe à $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$, Δ aussi.

Considérons donc la droite projective Δ_0. Plutôt que de construire un difféomorphisme entre $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ et Δ_0, nous allons construire un plongement ϕ de $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ dans $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ d'image Δ_0, ce qui montrera que Δ_0 est une sous-variété de $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, et ϕ induira alors le difféomorphisme voulu entre $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ et son image Δ_0. On construit ϕ de la façon suivante : l'injction canonique $i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ satisfait : $(p_n \circ i)(x) = (p_n \circ i)(x')$ ssi $p_1(x) = p_1(x')$ donc $p_n \circ i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ passe au quotient en une injection $\phi : \mathbb{R}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$, qui est lisse car $p_n \circ i$ l'est. Reste à vérifier que c'est une immersion (le fait que c'est un homéomorphisme sur son image sera automatique car $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ est compact et $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ séparé). Une façon de faire est de remarquer que ϕ est aussi l'application induite par passage au quotient (par $\pm\,\mathrm{Id}$ cette fois) de l'injection $i' : (x, y) \in \mathbb{S}^1 \mapsto (x, y, 0, \ldots, 0)\mathbb{S}^n$, dont la différentielle est non nulle donc injective puisque $\mathbb{S}^1$ est de dimension 1. Or la projection $\pi_n : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n/\{\pm\,\mathrm{Id}\} \simeq \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ est un difféo local, donc par composition la différentielle de ϕ est elle aussi injective. Une autre méthode consiste à passer dans des cartes...