Feuille 2 : sphères, tores, projectifs

Exercice 1. Sphères par projections stéréographiques. Soit $\mathbb{S}^n$ la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ munie de la topologie induite. On note $N = (0, \dots, 0, 1)$ et $S = (0, \dots, 0, -1)$ les pôles nord et sud respectivement.

1. Vérifier que les projections stéréographiques ϕ_N et ϕ_S par rapport aux pôles nord et sud sont des homéomorphismes de $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ et $\mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ respectivement sur $\mathbb{R}^n$.

   Rappel. ϕ_N (resp. ϕ_S) est défini par : pour tout $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ (resp. $\mathbb{S}^n \setminus \{S\}$), $(\phi_N(x), 0)$ (resp. $(\phi_S(x), 0)$) est l'unique point d'intersection de la droite (Nx) (resp. (Sx)) avec l'hyperplan $\mathbb{R}^n \times \{0\}$.

2. Montrer que l'on définit ainsi deux cartes compatibles de $\mathbb{S}^n$, qui munissent la sphère d'une structure de variété différentiable.

3. Vérifier que la structure de variété différentiable définie dans cet exercice coïncide avec celle dont $\mathbb{S}^n$ hérite en tant que sous-variété de $\mathbb{R}^{n+1}$.

4. Vérifier que l'injection canonique $i : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ est de classe C^∞. Montrer qu'une application $f : X \to \mathbb{S}^n$, où X est une variété, est de classe C^∞ ssi $i \circ f$ l'est. Utiliser ce critère pour construire une injection C^∞ de $\mathbb{S}^p$ dans $\mathbb{S}^{p+n}$.

Exercice 2. Quelques résultats théoriques.

1. Soient M, N, et P des variétés différentiables. Montrer que si $f : M \to N$ et $g : N \to P$ sont différentiables, alors $g \circ f : M \to P$ l'est aussi.

2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable et M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, munie de la structure différentiable induite. Montrer que $f_{|M} : M \to \mathbb{R}^p$ est différentiable.

3. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable et M une sous-variété de $\mathbb{R}^p$ telle que $f(U) \subset M$. Montrer que l'application induite $\bar{f} : x \in U \mapsto f(x) \in M$ est différentiable.

Exercice 3. Quadriques. Dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, identifié à $\mathbb{R}^{n+p}$, on considère la quadrique d'équation $\|x\|^2 - \|y\|^2 = 1$, $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.

Montrer que c'est une sous-variété difféomorphe à la sous-variété $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^p$.

"Rappels" sur la topologie quotient. Étant donné un ensemble X et une relation d'équivalence $\sim$ sur X, on note $p : X \to X/\sim$ la projection canonique qui à tout élément x de X associe sa classe d'équivalence pour $\sim$. Si X est un espace topologique, on définit sur $X/\sim$ la topologie quotient par : *U est un ouvert de $X/\sim$ si et seulement si $p^{-1}(U)$ est un ouvert de X*. Pour cette topologie, la projection p est alors trivialement continue, et on vérifie immédiatement qu'une application de $X/\sim$ dans un espace topologique Y est continue ssi $f \circ p : X \to Y$ l'est.

Exercice 4. Ruban de Mobius.

On fait agir $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}\times]-1,1[$. comme suit : Si $n\in\mathbb{Z}$, $x\in\mathbb{R}$ et $y\in]-1,1[$,

$$n\cdot(x,y)=(x+n,(-1)^n y).$$

Notons $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence que cette action définit sur $\mathbb{R}\times]-1,1[$. Si $(x,y)\in\mathbb{R}$ on notera $[x,y]$ sa classe dans $M=\mathbb{R}\times]-1,1[/\mathcal{R}$ et $p:\mathbb{R}\times]-1,1[\to\mathbb{R}\times]-1,1[/\mathcal{R}$ definie par $p((x,y))=[(x,y)]$.

1. Montrer que ensemblistement , $\mathbb{R}\times]-1,1[/\mathcal{R}$ est en bijection avec $[0,1]\times]-1,1[/\sim$ où $\sim$ désigne la plus petite relation d'équivalence satisfaisant $(0,y)\sim(1,-y)$. Essayez de vous représenter M.

2. Montrer que l'application p est ouverte.

3. Montrer que M est séparé, à base dénombrable et localement compact.

4. Définissons les deux ouverts suivants de M

$$U_1=\{[(x,y)]\in M,\ x\notin\mathbb{Z}\}\subset M \text{ et } U_2=\{[(x,y)]\in M,\ x\notin\frac{1}{2}+\mathbb{Z}\}\subset M.$$

Montrer que les deux applications

$$\begin{array}{rcl}\phi_1:]0,1[\times]-1,1[& \to & U_1\\ (x,y) & \to & [(x,y)]\end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl}\phi_2:]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[\times]-1,1[& \to & U_2\\ (x,y) & \to & [(x,y)]\end{array}$$

sont des homéomorphismes .

5. Construire un atlas sur M à l'aide de ϕ_1 et ϕ_2.

Exercice 5. Tore de dimension 1. Soit $\mathbb{T}^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le tore de dimension 1, muni de la topologie quotient, et p la projection canonique de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{T}^1$.

1. Montrer que $\mathbb{T}^1$ est connexe, séparé et compact.

2. Définir à partir de la restriction de p à $]0,1[$ et $]1/2,3/2[$ deux cartes compatibles de $\mathbb{T}^1$, qui munissent $\mathbb{T}^1$ d'une structure de variété.

3. Vérifier que la projection p est lisse et qu'une application $f:\mathbb{T}^1\to\mathbb{R}$ est lisse ssi $f\circ p$ l'est.

4. Montrer que l'application $x\in\mathbb{R}\mapsto e^{2i\pi x}\in\mathbb{S}^1$ induit un difféomorphisme entre le tore et le cercle unité $\mathbb{S}^1\subset\mathbb{R}^2$.

Exercice 6. Tore de dimension 2.

1. Reprendre les questions de l'exercice précédent pour le tore de dimension 2, $\mathbb{T}^2=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ et montrer que l'application *exp* induit un difféomorphisme entre $\mathbb{T}^2$ et $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$.

2. Montrer, à l'aide de l'application

$$\begin{array}{rccc}h: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3\\ & (\theta,\phi) & \mapsto & ((2+\cos\theta)\cos\phi,(2+\cos\theta)\sin\phi,\sin\theta).\end{array}$$

que $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est difféomorphe au tore de révolution $T\subset\mathbb{R}^3$ obtenu en faisant tourner autour de l'axe (Oz) le cercle $C_0\subset\{y=0\}$ de centre $(2,0,0)$ et de rayon 1. On pourra pour cela montrer que h est une immersion d'image T, qui induit une immersion bijective $\bar{h}:\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2\to T$, et que cette dernière est en fait un difféomorphisme.

Exercice 7. Espace projectif réel. On définit l'espace projectif réel $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ comme l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^{n+1}$, muni de la topologie quotient. On note $p : \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ la projection naturelle.

1. Montrer que $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ est connexe, séparé et compact.
2. Pour $i = 0, \dots, n$, on considère l'ensemble $V_i \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ des droites qui ne sont pas contenues dans l'hyperplan $\{x_i = 0\}$ et on définit φ_i l'application $V_i \to \mathbb{R}^n$ qui associe à une droite son intersection avec l'hyperplan affine $\{x^i = 1\} \simeq \mathbb{R}^n$. Vérifier que l'on définit ainsi des cartes compatibles qui recouvrent le projectif.
3. Montrer que la projection p est de classe C^∞ et qu'une fonction $f : \mathbb{R}\mathrm{P}^n \to X$ (X variété) est de classe C^∞ ssi $f \circ p$ l'est.
4. Montrer que l'inclusion $i : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ induit un homéomorphisme entre $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ et $\mathbb{S}^n/(x \sim -x)$ muni de la topologie quotient.
5. Montrer qu'il existe une unique structure de variété différentiable sur $\mathbb{S}^n/(x \sim -x)$ telle que la projection $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n/(x \sim -x)$ soit un C^∞-difféomorphisme local en tout point. Montrer que l'homéomorphisme de la question précédente est alors un difféomorphisme.
6. Regarder la Video.

Exercice 8. Projectifs de petite dimension.

1. Montrer que $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ est difféomorphe au cercle.
2. (Plongement de Véronèse) Montrer que $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ se plonge dans $\mathbb{R}^6$ via l'application définie sur $\mathbb{S}^2$

$$(x, y, z) \mapsto (x^2, y^2, z^2, xy, yz, xz).$$

Exercice 9. Droites projectives. On appelle droite projective toute partie de $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ image par la projection canonique p d'un sous espace de $\mathbb{R}^{n+1}$ de dimension 2.

Montrer qu'une droite projective est une sous-variété de $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ difféomorphe à $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$.