Feuille 1 : Sous-variétés

Exercice 1. Un peu de calcul différentiel

1. On a $d(g \circ f)_{x_0} = dg_{f(x_0)} \circ df_{x_0}$ ce qui se démontre par un développement limité en écrivant $f(x) = f(x_0) + df_{x_0}(x - x_0)$, de même pour g puis en composant.

2. On trouve la formule $(g \circ f)' = f' \cdot g' \circ f$ car la composée d'applications linéaires en dimension 1 est la multiplication. En général on trouve une formule exprimant la j-ème composante de $(\partial(g \circ f)/\partial x_i)(x_0) \in \mathbb{R}^k$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq k$ comme composante (i, j) d'un produit matriciel des jacobiennes de f et de g.

3. Sans difficulté.

4. On utilise le calcul de $d(g \circ f)$ avec $g = f^{-1}$. On trouve $d(f^{-1})_{y_0} = (df_{f^{-1}(y_0)})^{-1}$, ce qui donne aussi le résultat usuel lorsque $n = 1$.

5 Rappelons que l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n, $Mat(n, \mathbb{R})$, est de dimension finie. Toutes les normes sur $Mat(n, \mathbb{R})$ sont donc équivalentes. Etant donnée une norme sur $\mathbb{R}^n$, on utilisera le plus souvent la norme sur $Mat(n, \mathbb{R})$ qui lui est subordonnée:

$$\forall A \in Mat(n, \mathbb{R}), \quad ||| A ||| = Sup_{||X||=1} || AX || .$$

En effet, cette norme vérifie la relation $||| AB ||| \leq ||| A ||| \times ||| B |||$ et fait de $Mat(n, \mathbb{R})$ une algèbre de Banach, ce qui permet de parler de séries normalement convergentes.

L'application déterminant $det : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est polynomiale donc continue. On a $GL(n, \mathbb{R}) = det^{-1}(\mathbb{R}^*)$. Comme $\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, $GL(n, \mathbb{R})$ est un ouvert de $Mat(n, \mathbb{R})$.

Soit A une matrice inversible, on a pour $H \in Mat(n, \mathbb{R})$ de norme assez petite pour que$A+H$ soit inversible. On a

$$(A + H)^{-1} = A^{-1}(I - HA^{-1})^{-1}.$$

Nous sommes donc ramenés à calculer la différentielle en I. Posons $K = HA^{-1}$.

$$(I + K)^{-1} = \sum_{p=0}^{+\infty} K^p = I - K + K^2 \sum_{p=0}^{+\infty} K^p = I - K + o(K).$$

On en déduit

$$(A + H)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}HA^{-1} + +o(H).$$

Ainsi $d\mathcal{I}_A(H) = -A^{-1}HA^{-1}$.

Exercice 2. Inversion locale et fonctions implicites

1. D'après le théorème d'inversion locale il existe un ouvert $U' \subset U$ contenant x_0 et un ouvert $V' \subset V$ contenant $f(x_0)$ tel que $f : U' \to V'$ soit un difféomorphisme.

2. La fonction f n'est pas nécessairement injective, donc ni bijective ni un difféomorphisme. Elle est bien sûr un difféomorphisme local d'après le point précédent, donc localement injective. On peut par exemple considérer $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (e^x \cdot \cos(y), e^x \cdot \sin(y))$.

3. Si $n = 1$ la fonction f est globalement injective, et en fait un difféomorphisme global. C'est une conséquence du lemme de Rolle : si f' ne s'annule pas, f est strictement monotone donc injective. La différence entre les cas $n = 1$ et $n > 1$ s'explique par le fait que sur une courbe, on ne peut pas revenir au même endroit sans rebrousser chemin à un endroit, ce qui est faux en dimension supérieure.

4. On introduit pour tout $y \in V$ la fonction $\phi_y : x \mapsto x - (df_{x_0})^{-1}(f(x) - y)$. Sa différentielle ne dépend pas de y et on a $(d\phi_y)_{x_0} = 0$. On a donc $||(d\phi_y)_x|| < 1/2$ pour tout $y \in V$ et tout x assez proche de x_0. Donc par les accroissements finis, ϕ_y est contractante au voisinage de x_0. Par le théorème du point fixe (valable dans un Banach) elle admet un point fixe qu'on note $f^{-1}(y)$. De plus la fonction $y \mapsto f^{-1}(y)$ est bien différentiable, car c'est le cas d'un point fixe dépendant de manière dérivable d'un paramètre y (voir la démonstration du théorème de point fixe avec les suites de Cauchy).

5. Comme f est bijective on a l'existence de f^{-1} comme application. Il faut montrer qu'elle est différentiable et c'est une conséquence du théorème d'inversion locale (la différentiabilité se teste localement).
6. Pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$, la différentielle partielle $(D_y f)_{x_0,y_0}$ est une application linéaire $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ qui est tout simplement la différentielle de la fonction lisse $y \mapsto f(x_0, y)$. Sa matrice dans la base canonique est formée des $(\partial f/\partial y_k)(x_0, y_0)_{1\leq k\leq p}$. Si $m = p = 1$ on trouve tout simplement $\partial f/\partial y(x_0, y_0)$.
7. Il garantit qu'il existe $V \subset \mathbb{R}^m$ et $W \subset \mathbb{R}^p$ voisinages de x_0 et de y_0 et $\phi : V \to W$ lisse telle que $f(x, y) = 0$ si et seulement si $y = \phi(x)$. De plus $d\phi_x = -(D_y f)^{-1}_{x,\phi(x)} \circ (D_x f)_{x,\phi(x)}$.
8. Définissons $g : U \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$, $(x, y) \mapsto (x, f(x, y))$. La différentielle $dg_{(x_0,y_0)}$ est une matrice triangulaire par blocs, de diagonale 1_m et $D_y f_{(x_0,y_0)}$, et donc $dg_{(x_0,y_0)}$ est inversible. On applique le théorème d'inversion locale et on voit que pour tout $x \in \mathbb{R}^m$ il existe un unique $\phi(x) \in \mathbb{R}^n$ tel que $(x, 0) = g(x, \phi(x))$. On a $f(x, \phi(x)) = 0$ d'où en différentiant $D_x f + D_y f \circ d\phi = 0$ d'où l'expression pour $d\phi$.

Montrons inversement que le théorème des fonctions implicites implique le théorème d'inversion locale:

On a cette fois $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ à différentielle inversible, et on veut montrer que c'est un difféomorphisme local. On considère $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x, y) \mapsto y - f(x)$ et on lui applique le théorème des fonctions implicites pour la projection $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (x, y) \mapsto y$. Autrement dit $F(x, y) = 0$ est l'équation du graphe de f, et on considère la projection de ce graphe sur l'axe des y.

Exercice 3. Ouverts difféomorphes. 1. Oui. L'application affine $x \in B(0, 1) \mapsto rx + p \in B(p, r)$ est C^∞ (car restriction à un ouvert d'une application affine sur un espace vectoriel de dimension finie), bijective, et son inverse est également C^∞ (car également affine).

2. Oui. En dimension 1, l'application $f : x \in]-1, 1[\mapsto \tan(\frac{\pi}{2}x) \in \mathbb{R}$ est C^∞, bijective de $]-1, 1[$ dans $\mathbb{R}$ et d'inverse C^∞. En dimension n quelconque, l'application $F : (x_1, \ldots, x_n) \in]-1, 1[^n \mapsto (f(x_1), \ldots, f(x_n)) \in \mathbb{R}^n$ est alors elle aussi C^∞, bijective de $]-1, 1[^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et d'inverse C^∞, ces propriétés découlant immédiatement de celles de f.

3. Oui. L'application $\phi : x \in B(0, 1) \mapsto f(\|x\|)\frac{x}{\|x\|} \in \mathbb{R}^n$ (où f désigne la même fonction que dans la question précédente), d'inverse $y \in \mathbb{R}^n \mapsto f^{-1}(\|y\|)\frac{y}{\|y\|} \in B(0, 1)$, définit une bijection lisse et d'inverse lisse *en dehors de* 0. On pourrait étudier la régularité en 0, mais on peut aussi se simplifier la vie en remplaçant f par un difféomorphisme ρ de $]0, 1[$ dans $]0, +\infty[$ ayant en plus la propriété de coïncider avec l'identité près de 0 (certes, il faut construire une telle fonction ! On admettra ici que cela existe, mais on encourage le lecteur à faire ce très bon exercice d'analyse réelle). L'application ϕ coïncide alors avec l'identité (de $\mathbb{R}^n$) au voisinage de 0 et y est donc lisse.

4. Oui. "Être difféomorphes" est une relation d'équivalence sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$, donc d'après 2. et 3., $B(0, 1)$ et $]-1, 1[^n$ sont difféomorphes.

5. Oui. Considérer l'application $\phi : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto f(\|x\|)\frac{x}{\|x\|} \in B(0, 2) \setminus \bar{B}(0, 1)$ où cette fois-ci, f est un difféomorphisme de $]0, +\infty[$ dans $]1, 2[$.

6. Ils sont difféomorphes si et seulement si $n = m$. C'est évident en utilisant que df est bijective et linéaire, pour f un tel difféomorphisme. On notera que le même résultat reste vrai en remplaçant "difféomorphisme" par "homéomorphisme" mais la démonstration nécessite alors la cohomologie...

7. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ n'est pas connexe par arcs, alors que $\mathbb{R}$ l'est, or un difféomorphisme préserve le nombre de composantes connexes par arcs, donc $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas difféomorphes.

8. En coordonnées polaires, on voit bien ce qu'il faudrait faire : envoyer un point de $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$ de coordonnées polaires (r, θ) (bien définies, avec $(r, \theta) \in]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$) sur le point de coordonnées polaires $(r, \theta/2)$ (qui appartient bien à $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $(r, \theta/2)$ appartenant à $]0, +\infty[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Mais à proprement parler, l'application $\phi : (r, \theta) \mapsto (r, \theta/2)$ est une application de $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$ dans $]0, +\infty[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, pas de $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$ dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ comme on le voudrait. L'application recherchée est en fait l'expression de l'application évoquée ci-dessus *en coordonnées cartésiennes*. Autrement dit, si on note ψ l'application de changement de coordonnées

$$(r, \theta) \in]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$$

(qui est un difféomorphisme (mais il faudrait le justifier une fois pour toutes, cf. correction de l'exercice 2) et induit un difféomorphisme $\psi_|$ de $]0, +\infty[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$), l'application recherchée est $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\}) \mapsto \psi_| \circ \phi \circ \psi^{-1}(x, y)$.

Une autre possibilité, qui évite les changements de coordonnées, est d'identifier $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ et de considérer l'application qui, en complexes, s'écrit $z \mapsto z^2$, et donc en cartésien : $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$. L'écriture cartésienne permet de montrer facilement que cette application est lisse et de différentielle inversible en tout point, alors que l'écriture en complexes permet de montrer qu'elle induit une bijection entre $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$ et $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Le théorème d'inversion *globale* entraîne alors qu'il s'agit d'un difféomorphisme.

Exercice 4. Difféomorphismes et changements de coordonnées. 1. L'application "ainsi obtenue" est l'application $\psi : (r, \theta) \in]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$ de la question précédente. Le fait qu'elle soit (bien définie et) bijective est supposé connu (géométrie plane standard). Elle est en outre lisse comme composée de fonctions lisses. Reste à justifier que l'inverse est lisse. Le plus simple pour cela, plutôt que de l'exprimer explicitement en termes de fonctions usuelles (ou de se lancer dans l'analyse complexe), est sans-doute de remarquer que sa différentielle est inversible en tout point, le déterminant jacobien

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial r} & \frac{\partial\psi_1}{\partial\theta} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial r} & \frac{\partial\psi_2}{\partial\theta} \end{vmatrix}(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

étant partout non nul *sur l'ouvert de définition*, puis d'invoquer le théorème d'inversion *globale* une fois encore.

2. Si P est la matrice de passage de la base canonique à l'autre, on a $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. L'application correspondante (application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, de matrice P^{-1} dans la base canonique) définit une bijection de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, C^∞ et d'inverse C^∞, toutes deux étant linéaires, donc un difféomorphisme.

Exercice 5. La sphère comme sous-variété de $\mathbb{R}^3$. 1. (définition par équation (locale ou globale)) Notons f la fonction $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2 + y^2 + z^2 \in \mathbb{R}$, qui est polynomiale donc lisse. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathrm{Jac}_{(x,y,z)} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \;\; \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \;\; \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \right) = (2x \;\; 2y \;\; 2z),$$

donc $Df_{(x,y,z)} = 0$ si et seulement si $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Et si $Df_{(x,y,z)}$ est non nulle, son image est un sous-espace vectoriel non trivial de $\mathbb{R}$, donc $\mathbb{R}$ tout entier, ce qui signifie que $Df_{(x,y,z)}$ est surjective. Ainsi, le seul point critique de f est l'origine, et la seule valeur singulière est donc $f(0) = 0$. En particulier, 1 est une valeur régulière de f (ou encore : f est une submersion au-dessus de 1), donc $\mathbb{S}^2 = f^{-1}(\{1\})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension $\dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathbb{R}) = 2$.

2. (définition par redressement local) L'application ϕ est C^∞ sur l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$ car ses composantes sont polynomiales en les coordonnées. D'après le théorème d'inversion *globale*, pour montrer que ϕ est un difféomorphisme sur son image, il suffit de vérifier que ϕ est injective et que sa différentielle en tout point est inversible (cela entraînera en particulier que l'image de ϕ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$).

ϕ est bien injective : si $\phi(x,y,z) = \phi(x',y',z')$ avec (x,y,z) et $(x',y',z') \in U$, alors $x = x'$, $y = y'$ et $x^2+y^2+z^2-1 = (x')^2+(y')^2+(z')^2-1$, ce qui avec les deux premières égalités entraîne $z^2 = (z')^2$, et finalement $z = z'$ car z et z' sont supposés > 0.

Quant à sa différentielle, elle a pour matrice jacobienne :

$$\mathrm{Jac}\phi_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix},$$

de déterminant $2z \neq 0$ (sur U !), donc elle est inversible. ϕ est donc un difféomorphisme sur son image. On peut vérifier que cette image est l'épigraphe d'un paraboloïde de révolution d'axe vertical et de sommet $(0,0,-1)$:

$$\phi(U) = \{(x,y,u) \in \mathbb{R}^3, (x,y) \in \mathbb{R}^2, u > x^2+y^2-1\},$$

chaque demi-sphère $\{(x,y,z), x^2+y^2+z^2 = r^2\} \subset U$ étant envoyée sur le disque horizontal

$$\{(x,y,r^2-1), x^2+y^2 < r^2\}.$$

En particulier,

$$\phi(\mathbb{S}^2 \cap U) = \{(x,y,0), x^2+y^2 < 1\} = \phi(U) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}).$$

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{S}^2 \cap U$, il existe un difféomorphisme de redressement de $\mathbb{S}^2$ au voisinage de p. Pour conclure que la sphère est une sous-variété, on va utiliser son invariance par rotation. Soit q un point quelconque de la sphère $\mathbb{S}^2$. Il existe une rotation (axiale) R de $\mathbb{R}^3$ envoyant q sur un $p \in \mathbb{S}^2 \cap U$, par exemple le pôle Nord. Mais alors la composée $\phi' = \phi \circ R$ (noter que R est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$), définie sur le voisinage $U' = R^{-1}(U)$ de q, donne un redressement local de $\mathbb{S}^2$ au voisinage de q :

$$\phi'(\mathbb{S}^2 \cap U') = (\phi \circ R)(R^{-1}(\mathbb{S}^2) \cap R^{-1}(U)) = \phi(\mathbb{S}^2 \cap U) = (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \cap \phi(U) = (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \cap \phi'(U').$$

Ainsi on retrouve que $\mathbb{S}^2$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

Remarque. On n'était pas obligé de construire des difféomorphismes de redressement au voisinage de tout point. L'image d'une sous-variété par un difféomorphisme reste une sous-variété, donc une fois qu'on sait que $\mathbb{S}^2 \cap U$ est une sous-variété, on en déduit que $R(\mathbb{S}^2 \cap U) = \mathbb{S}^2 \cap R(U)$ est une sous-variété pour toute rotation R, et comme les $R(U)$ recouvrent toute la sphère, la sphère est une sous-variété au voisinage de chacun de ses points, donc c'est (globalement) une sous-variété.

3. (définition par plongement local) L'application φ est lisse sur son ouvert Ω de définition car chaque composante l'est par composition ($\sqrt{}$ est bien lisse sur $\mathbb{R}_+^*$ où $1-x^2-y^2$ prend ses valeurs). C'est une *immersion* : sa jacobienne

$$D\varphi_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \end{pmatrix}$$

est de rang $2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ en tout point. Elle est clairement injective, son image est $\mathbb{S}^2 \cap U$ et enfin l'inverse de l'application bijective qu'elle induit sur son image n'est autre que la projection

$(x,y,z) \mapsto (x,y)$, qui est continue sur $\mathbb{S}^2 \cap U$ comme restriction d'application continue sur $\mathbb{R}^3$ tout entier. L'application φ définit donc un plongement de l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$, d'image $\mathbb{S}^2 \cap U$. Soit maintenant q un point quelconque de la sphère $\mathbb{S}^2$. Comme dans la question précédente, il existe une rotation (axiale) R de $\mathbb{R}^3$ envoyant q sur un $p \in \mathbb{S}^2 \cap U$. Mais alors la composée $\varphi' = R \circ \varphi$ est encore un plongement de Ω dans $\mathbb{R}^3$ (car composée à gauche d'un tel plongement avec une rotation, qui est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$), d'image le voisinage $R(\mathbb{S}^2 \cap U)$ de q dans $\mathbb{S}^2$. On retrouve finalement le fait que $\mathbb{S}^2$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

Exercice 6. Et si on enlève des hypothèses... 1. Dans cette question, on s'intéresse à un ensemble de la forme $f^{-1}(\{0\})$ où f *n'est pas* une submersion au-dessus de 0. En effet, notons f la fonction $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2 + y^2 - z^2 \in \mathbb{R}$, qui est polynomiale donc lisse. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathrm{Jac}_{(x,y,z)} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \;\; \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \;\; \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \right) = (2x \;\; 2y \;\; -2z),$$

donc $Df_{(x,y,z)} = 0$ si et seulement si $(x,y,z) = (0,0,0)$. Or $(0,0,0)$ appartient à l'ensemble $C = f^{-1}(\{0\})$ étudié, qui n'est donc pas un niveau régulier de la fonction f. Mais cela ne suffit pas pour dire que C n'est pas une sous-variété ! (penser à $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^3 - y^3 = 0\}$...). Il nous faut donc un argument.

Pour cela, il est bon de commencer par visualiser C : il s'agit d'un cône de révolution autour de l'axe (Oz), symétrique par rapport au plan (xOy), et le point problématique est son sommet $(0,0,0)$. On peut intuiter qu'aucun voisinage de celui-ci dans C n'est homéomorphe à un ouvert du plan, ce qui permettrait de conclure.

Mettons tout cela en forme. Si C est une sous-variété, elle est de dimension 2 (grâce à f, on montre que $C \setminus \{0\}$ est une sous-variété de dimension 2). Supposons qu'il existe un voisinage U de $0 \in \mathbb{R}^3$ et un plongement $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tel que $C \cap U = \varphi(\Omega)$. Par définition d'un plongement, φ induit un homéomorphisme entre Ω et $C \cap U$. Considérons un petit disque D centré en $\varphi^{-1}(0)$ et inclus dans Ω. Alors φ induit aussi un homéomorphisme entre D et un voisinage de 0 dans $C \cap U$, qui est de la forme $C \cap V$ avec V voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^3$ inclus dans U, par définition de la topologie induite. Et par conséquent φ induit un homéomorphisme entre $D \setminus \{\varphi^{-1}(0)\}$ et $(C \cap V) \setminus \{0\}$. Or $D \setminus \{\varphi^{-1}(0)\}$ est connexe par arcs, et $(C \cap V) \setminus \{0\}$ ne l'est pas. En effet, C possède des points d'ordonnée strictement positive et strictement négative arbitrairement proches de l'origine, donc dans V, et tout arc continu joignant deux tels points dans doit passer par un point d'ordonnée nulle, or $(C \cap V) \setminus \{0\}$ ne possède pas de tel point. On aboutit donc à une contradiction, donc C n'est pas une sous-variété.

Remarque 1. Cet argument aurait été un peu plus court si on avait pris la définition suivante de sous-variété de dimension k :

M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension k si pour tout point $p \in M$, il existe un voisinage U de p dans $\mathbb{R}^n$ et un plongement $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ envoyant 0 sur p et $\mathbb{R}^k$ sur $M \cap U$.

Vérifiez que cette définition est bien équivalente à celle donnée en cours ou en TD, où on demandait seulement à φ d'être un plongement *d'un ouvert Ω de* $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^n$.

Remarque 2. L'argument précédent est de nature "topologique" et a l'avantage de marcher dans des situations plus générales. Dans ce cas précis, on aurait aussi pu utiliser l'argument "différentiable" suivant (vu en cours sur un autre exemple). Supposons qu'il existe un difféomorphisme de redressement $\phi : U \to V$, avec U voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^3$ et V ouvert de $\mathbb{R}^3$, tel que $\phi(C \cap U) = (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \cap V$. Quitte à restreindre ϕ, on peut supposer $U = B(0, 2\varepsilon)$ pour ε suffisamment petit. Considérons les courbes paramétrées $\gamma_i : t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\mapsto tv_i \in \mathbb{R}^3$, avec $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (-1,0,1)$ et $v_3 = (0,1,1)$. Pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\gamma_i(t) \in C \cap U$ donc $\phi \circ \gamma_i(t) \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. En particulier, les vecteurs vitesse en 0 des courbes correspondantes appartiennent aussi à $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$, i.e.

$$(\phi \circ \gamma_i)'(0) = D\phi_{\gamma_i(0)}(\gamma_i'(0)) = D\phi_0(v_i) \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}.$$

Ces trois vecteurs appartiennent à un même espace vectoriel de dimension 2, donc sont linéairement indépendants, or v_1, v_2 et v_3, eux, sont linéairement indépendants (le vérifier). Ceci contredit le fait que $D\phi_0$ est inversible, et donc que ϕ est un difféomorphisme. Ainsi, C n'est pas une sous-variété.

L'hyperboloïde à une nappe $H = f^{-1}(\{1\})$, lui, est un niveau régulier de f, donc est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

2. Dans cette question, on s'intéresse au graphe Γ de la fonction valeur absolue, que l'on peut facilement voir, de diverses façons, comme l'image d'un plongement topologique (application injective induisant un homéomorphisme sur son image) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ (par exemple $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto (t, |t|)$, ou encore $t \in \mathbb{R} \mapsto (t^3, |t|^3)$, qui elle est dérivable en 0), mais pas lisse a priori. Ce n'est pas pour autant qu'un tel plongement lisse n'existe pas ! Pour montrer que Γ *n'est pas* une sous-variété lisse, il nous faut donc un argument.

Méthode 1. Adapter le second argument de la question précédente.

Méthode 2. (plus naturelle une fois introduite une quatrième définition équivalente de sous-variété, qu'il est bon d'avoir en tête de temps en temps). On montre facilement, en généralisant la question 3 de l'exercice 3, que si f est une fonction lisse d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^{n-k}$, alors son graphe $\{(x, f(x)), x \in U\} \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \simeq \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension k. "Réciproquement", toute sous-variété est *localement* le graphe d'une fonction lisse :

M est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^n$ de dimension k si et seulement si, pour tout $p \in M$, quitte à permuter les coordonnées de $\mathbb{R}^n$, il existe un voisinage U de $(p_1, ..., p_k)$ dans $\mathbb{R}^k$, un voisinage V de $(p_{k+1}, ..., p_n)$ dans $\mathbb{R}^{n-k}$ et une fonction lisse $f : U \to V$ tels que $M \cap (U \times V) =$ graphe$(f) = \{(x, f(x)),\ x \in U\}$.

On peut montrer cela en partant de la définition des sous-variétés par submersions et en utilisant le théorème des fonctions implicites.

On revient maintenant à notre graphe Γ de la fonction valeur absolue. Au voisinage de $(0, 0)$, c'est le graphe d'une fonction de x qui n'est pas lisse, et ça ne peut être le graphe que d'une seule fonction de x, donc ce n'est pas le graphe d'une fonction lisse de x. Mais il y a un "quitte à permuter les coordonnées" dans la caractérisation ci-dessus. Notre ensemble pourrait être le graphe d'une fonction lisse de y ! (penser au graphe $\{(x, x^{1/3}), x \in \mathbb{R}\}$ de la bijection réciproque, non lisse, de $y \mapsto y^3$, qui elle est lisse) Mais non, ce n'est même pas le graphe d'une fonction de y tout court, puisque pour un $y > 0$ donné, il y a plusieurs points de la courbe ((y, y) et $(-y, y)$) d'ordonnée y. Ainsi, Γ n'est pas une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^2$ (c'est en revanche une sous-variété *topologique*, mais ce n'est pas notre sujet ici).

3. Dans cette question, on s'intéresse à l'image d'une immersion injective d'un ouvert de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas un homéomorphisme sur son image. En effet, premièrement, γ est lisse, et pour tout $t \in]-\pi, \pi[$, $\gamma'(t) = (\cos t, \cos^2 t - \sin^2 t) \neq (0, 0)$ (la première coordonnée s'annule seulement pour $t = \pm\frac{\pi}{2}$, auquel cas la seconde vaut -1). Pour une application γ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ (ici $n = 2$), cela signifie précisément que γ est une immersion (sa différentielle $D\gamma_t : \lambda \in \mathbb{R} \to \lambda\gamma'(t) \in \mathbb{R}^n$ est injective pour tout t). De plus, pour tous t, $t' \in]-\pi, \pi[$,

$$\begin{aligned}
\gamma(t) = \gamma(t') \quad &\Leftrightarrow \quad \sin t = \sin t' \text{ et } \sin t \cos t = \sin t' \cos t' \\
&\Leftrightarrow \quad (\sin t = \sin t' \text{ et } \cos t = \cos t') \quad \text{ou} \quad \sin t = \sin t' = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad t = t' \quad \text{ou} \quad t = t' = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad t = t',
\end{aligned}$$

donc γ est injective. Pour voir que γ n'est pas un homéomorphisme sur son image, il faut visualiser celle-ci. Il suffit pour cela d'étudier la courbe paramétrée sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et de procéder ensuite par symétries. On obtient une courbe en forme de 8, centré en $(0, 0) = \gamma(0)$. Notons Γ

cette courbe, et montrons que l'application $(\gamma :]-\pi,\pi[\to \Gamma)^{-1}$ n'est pas continue en $(0,0)$. Il suffit pour cela d'exhiber une suite de points qui tendent vers $(0,0)$ dans Γ mais dont l'image par cette application ne tend pas vers 0 dans $]-\pi,\pi[$, i.e. une suite de points $\gamma(t_n)$ qui tendent vers $(0,0)$ alors que t_n ne tend pas vers 0. Il suffit pour cela de prendre n'importe quelle suite (t_n) tendant vers π ou $-\pi$. Tout ceci formalise l'idée que la courbe "se referme trop sur elle même pour pouvoir être plongée".

Tout ceci n'est là que pour justifier le préambule de la question ("et si on enlève *homéomorphisme sur son image*"), mais pour montrer que Γ n'est pas une sous-variété, il suffit d'adapter l'un des arguments des questions précédentes (composantes connexes ou vecteurs tangents).

Exercice 7. Tore de révolution. 1. Dans le plan (xOz), le cercle C_0 a pour équation $(x-2)^2+z^2=1$, $y=0$. Donc si on note $(r,\theta,z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ les coordonnées cylindriques sur $\mathbb{R}^3 \setminus (Oz)$, la surface de révolution T obtenue en faisant tourner C_0 autour de l'axe (Oz) a pour équation $(r-2)^2+z^2=1$, soit en coordonnées cartésiennes, $(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2=1$. En effet,

$$(x,y,z) \in T \quad \Leftrightarrow \quad R_{-\theta}(x,y,z) \in C_0 \quad \Leftrightarrow \quad (r,0,z) \in C_0,$$

où $R_{-\theta}$ désigne la rotation d'axe orienté (Oz) et d'angle $-\theta$. Ainsi, $T = f^{-1}(\{1\})$ avec $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2 = (r(x,y)-2)^2+z^2$. Cette application est lisse sur l'ouvert $\mathbb{R}^3 \setminus (Oz)$, qui contient T. Pour montrer que T est une sous-variété de dimension 2, il suffit de vérifier que c'est une submersion au dessus de 1. Or

$$\begin{aligned} \mathrm{Jac}_{(x,y,z)} f &= \left(2(r-2)\frac{\partial r}{\partial x}(x,y) \quad 2(r-2)\frac{\partial r}{\partial x}(x,y) \quad 2z \right) \\ &= \left(2x\frac{r-2}{r} \quad 2y\frac{r-2}{r} \quad 2z \right) \end{aligned}$$

qui est non nul dès que $z \neq 0$, et quand $z=0$, $(r-2)^2=1$ donc $2\frac{r-2}{r}(x,y) \neq (0,0)$. Ainsi $Df_{(x,y,z)} \neq 0$ pour tout $(x,y,z) \in T = f^{-1}(\{1\})$, ce qu'on voulait montrer.

L'espace tangent à T en A, $T_A(T)$, est le noyau de $\mathrm{Jac}_A f$. Après calculs, on trouve

$$T_A(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y=0\}.$$

2. L'application h définit un paramétrage lisse (non injectif) du tore T. En effet, si R_ϕ désigne la rotation d'axe (Oz) et d'angle ϕ, $h(\theta,\phi) = R_\phi(2+\cos\theta, 0, \sin\theta)$, donc à ϕ fixé,

$$\{h(\theta,\phi), \theta \in \mathbb{R}\} = R_\phi(\{(2+\cos\theta,0,\sin\theta), \theta \in \mathbb{R}\}) = R_\phi(C_0)$$

et donc finalement

$$h(\mathbb{R}^2) = \{h(\theta,\phi), \theta, \phi \in \mathbb{R}\} = \bigcup_{\phi \in \mathbb{R}} R_\phi(C_0)$$

est bien la surface de révolution obtenue en faisant tourner C_0 autour de l'axe (Oz). h est en outre une immersion : pour tout $(\theta,\phi) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{Jac}_{(\theta,\phi)} h = \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\phi & -(2+\cos\theta)\sin\phi \\ -\sin\theta\sin\phi & (2+\cos\theta)\cos\phi \\ \cos\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $\cos\theta \neq 0$, $\mathrm{Jac}_{(\theta,\phi)} h$ est clairement de rang 2. Et si $\cos\theta = 0$, alors

$$\mathrm{Jac}_{(\theta,\phi)} h = \begin{pmatrix} \pm\cos\phi & -2\sin\phi \\ \pm\sin\phi & 2\cos\phi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est encore de rang 2, les vecteurs $\begin{pmatrix}\pm\cos\phi\\ \pm\sin\phi\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\end{pmatrix}$ étant linéairement indépendants (orthogonaux unitaires) quelque soit ϕ.

Reste enfin à voir que tout point du tore possède un voisinage image par h d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ en restriction auquel h définit un plongement. On peut voir que les ouverts $I_i \times I_j$, $i, j \in \{0, 1\}$, où $I_0 =]-\pi, \pi[$ et $I_1 =]0, 2\pi[$, conviennent. L'injectivité de h sur chacun est facile à vérifier, le fait que les $h(I_i \times I_j)$ forment un recouvrement ouvert de T aussi. Démontrer proprement que $(h : I_i \times I_j \to h(I_i \times I_j))^{-1}$ est continue est un peu plus fastidieux. On peut faire l'économie de cette étape en exploitant la *compacité* du tore (fermé borné de $\mathbb{R}^3$). En effet, si l'on note plutôt $I_0 =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et I_k les translatés $I_0 + k\frac{\pi}{2}$ pour $k = 1$ à 4 (de sorte que les I_i forment un recouvrement ouvert de $[0, 2\pi]$, l'injectivité de h sur chaque $I_i \times I_j$ et le fait que les $h(I_i \times I_j)$ forment un recouvrement ouvert de T sont toujours aussi faciles à vérifier, mais cette fois le fait que la restriction de h à chaque $I_i \times I_j$ induit un homéomorphisme sur son image est quasi immédiat : en effet, h restreint *à l'adhérence* de $I_i \times I_j$ induit aussi une bijection (c'est pour cela exactement que l'on a réduit la taille des intervalles) continue sur son image, mais (fait à retenir !) une bijection continue entre compacts est automatiquement un homéomorphisme ! Par conséquent *la restriction* de h à $I_i \times I_j$ induit encore un homéomorphisme sur son image, et on a fini !

$A = h(0, \frac{\pi}{4})$. L'espace tangent $T_A(T)$ est l'image de $Jac_{(0,\frac{\pi}{4})} = \begin{pmatrix} 0 & -2\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 2\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi $T_A(T)$ est l'espace vecoriel engendré par les vecteurs $(0, 0, 1)$ et $(-1, 1, 0)$. On retrouve le résultat trouvé à la question 1.

Exercice 8:

Soit M une sous variété de $\mathbb{R}^m$ de dimension k. Soit N une sous variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension l. Soit $(a, b) \in M \times N$.

Comme M est une sous variété de $\mathbb{R}^m$, il existe un ouvert U_1 de $\mathbb{R}^m$ contenant a, un ouvert V_1 de $\mathbb{R}^m$ contenant $0_{\mathbb{R}^m}$, un difféomorphisme $f_1 : U_1 \to V_1$ tel que $f(U_1 \cap M) = (\mathbb{R}^k \times 0_{\mathbb{R}^{m-k}}) \cap V_1$.

Comme N est une sous variété de $\mathbb{R}^n$, il existe un ouvert U_2 de $\mathbb{R}^n$ contenant b, un ouvert V_2 de $\mathbb{R}^n$ contenant $0_{\mathbb{R}^n}$, un difféomorphisme $f_1 : U_2 \to V_2$ tel que $f(U_2 \cap N) = (\mathbb{R}^l \times 0_{\mathbb{R}^{n-l}}) \cap V_2$.

Alors il existe un ouvert $U_1 \times U_2$ de $\mathbb{R}^{m+n}$ contenant (a, b), un ouvert $V_1 \times V_2$ de $\mathbb{R}^{m+n}$ contenant $0_{\mathbb{R}^{n+m}}$, un difféomorphisme $f = (f_1, f_2) : U_1 \times U_2 \to V_1 \times V_2$ tel que $f((U_1 \times U_2) \cap (M \times N)) = (\mathbb{R}^l \times 0_{\mathbb{R}^{n-l}}) \cap (V_1 \times V_2)$.

Ceci démontre que $M \times N$ est une sous variété de dimension $k + l$.

Exercice 9:

1. Notons $A_{i,j}$ la matrice obtenue à partir de A en rayant la ième ligne et la jième colonne. Calculons $\det(A + tE_{i,j})$ en le développant par rapport à la jième colonne. Rappelons que la comatrice de A, notée $Comat(A)$, est la matrice carrée d'ordre n dont le terme d'indice (i, j) est $(-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$. Vous avez démontré pendant votre scolarité.

$$\det(A) I_n = A Comat(A)^T = Comat(A)^T \, A$$

On a $\det(A + tE_{i,j}) = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$.

Soit $H = (h_{i,j}) \in Mat(n, \mathbb{R})$. On a

$$d \det_A \cdot H = \sum_{(i,j)} h_{i,j} \det(A + tE_{i,j}) = \sum_{(i,j)} h_{i,j} (-1)^{i+j} \det(A_{i,j}) = Tr\left[H Comat(A)^T\right]$$

Si $A \in GL(n, \mathbb{R})$, $d \det_A \cdot H = \det(A) Tr(HA^{-1})$.

2. La matrice Jacobienne de l'application det : $Mat(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est la comatrice. Si M est inversible, la comatrice n'est pas nulle et det est une submersion en tout point de $SL(n,\mathbb{R})$. Posons $f : Mat(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ f(M) = \det(M) - 1$. Alors $f^{-1}(\{0\}) = SL(n,\mathbb{R})$. Ainsi $SL(n,\mathbb{R})$ est une sous-variété de $Mat(n,\mathbb{R})$. L'espace tangent en $A \in SL(n,\mathbb{R})$ est

$$T_A(SL(n,\mathbb{R})) = \{H \in Mat(n,\mathbb{R}),\ Tr(HA^{-1}) = 0\}.$$

3. On pose

$$\begin{array}{rcl} f : Mat(n,\mathbb{R}) & \to & Sym(n,\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & MM^T. \end{array}$$

Soit $P \in Mat(n,\mathbb{R})$, on a $df_P(H) = PH^T + HP^T$. Montrons que si $P \in O(n)$, alors $df_P : Mat(n,\mathbb{R}) \to Sym(n,\mathbb{R})$ est surjective. Soit A une matrice symétrique, On a

$$A = d\,f_P\left(\frac{A(P^T)^{-1}}{2}\right).$$

Ainsi f est une submersion en chaque point de O_n. Comme $O(n) = f^{-1}(\{0\})$. On en déduit que $O(n)$ est une sous variété de $Mat(n,\mathbb{R})$. Notons

$$AntiSym(n,\mathbb{R}) = \{M \in Mat(n,\mathbb{R}),\ M + M^T = 0\}.$$

C'est un sous espace vectoriel de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$ de $Mat(n,\mathbb{R})$. On a

$$H \in Kerd\,f_P \iff HP^T \in AntiSym(n,\mathbb{R}) \iff H \in Antisym(n,\mathbb{R})P.$$

Ainsi, si $P \in O(n)$, $T_P\,(O(n)) = Antisym(n,\mathbb{R})P$.