# Feuille 1 : Calcul différentiel et sous-variétés

**Exercice 1.** Soient $n, m, k$ des entiers et $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ et $W \subset \mathbb{R}^k$ des ouverts.

1. Soit $f : U \to V$ et $g : V \to W$ des fonctions lisses. Donner la formule précise pour $d(g \circ f)$ et la prouver.
2. Que se passe-t-il lorsque $n = m = k = 1$ ? Dans le cas où $n, m, k$ sont quelconques, réecrire la formule pour $d(g \circ f)$ en termes de dérivées partielles.
3. Supposons $n = 2$, $m = 1$, $k = 3$, $U = \mathbb{R}^2$, $V = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = \sin(x + y^3)$ et $g(z) = (z, z^2, \cos(z))$. Calculer $d(g \circ f)$.
4. Supposons que $f : U \to V$ est un difféomorphisme. Vérifier que $n = m$ et calculer $d(f^{-1})$.
5. Montrer que l'ensemble des matrices carrées inversibles d'ordre $n$, $GL(n, \mathbb{R})$, est un ouvert de $Mat(n, \mathbb{R})$. Montrer que

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I} : GL(n,\mathbb{R}) & \to & GL(n,\mathbb{R}) \\ M & \to & M^{-1} \end{array}$$

est différentiable en tout point $A$ de $GL(n, \mathbb{R})$ et calculer sa différentielle $d\mathcal{I}_A$.

**Exercice 2.** Cet exercice récapitule quelques points autour des théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites.

1. Soit $n$ un entier, $U, V \subset \mathbb{R}^n$ deux ouverts. Soit $f : U \to V$ une application lisse. Soit $x_0 \in U$. Supposons $df_{x_0}$ inversible. Que garantit le théorème d'inversion locale ?
2. Supposons $U$ connexe et $df_{x_0}$ inversible pour tout $x_0 \in U$. Est-ce que $f$ est un difféomorphisme sur son image? Est-ce que $f$ est injective ? Si cela est faux, pouvez-vous donner un contre-exemple ?
3. Supposons $U$ connexe, $n = 1$ et $df_{x_0}$ inversible pour tout $x_0 \in U$. Montrer que $f$ est un difféomorphisme sur son image.
4. Revoyez la démonstration du théorème d'inversion locale (à la maison)
5. Supposons $df_{x_0}$ inversible pour tout $x_0 \in U$ et $f$ injective. Montrer que $f$ est un difféomorphisme sur son image. Ce résultat s'appelle le théorème d'inversion globale.
6. Soit $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application lisse. Rappeler la définition de la différentielle partielle $D_y f$. Comment peut-on l'écrire explicitement comme matrice ? Que se passe-t-il lorsque $m = p = 1$ ?
7. Soit $(x_0, y_0) \in U$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et $(D_y f)_{(x_0,y_0)}$ est inversible. Que garantit le théorème des fonctions implicites ?
8. Démontrer le théorème des fonctions implicites à partir du théorème d'inversion locale.

**Exercice 3. Ouverts difféomorphes.** Dans chacun des cas suivants, déterminer si les deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ donnés sont difféomorphes. Pour tout $p \in \mathbb{R}^n$ et tout $r > 0$, $B(p, r)$ désigne la boule euclidienne ouverte de $\mathbb{R}^n$ de centre $p$ et de rayon $r$, et $\bar{B}(p, r)$ la boule fermée correspondante.

1. $B(0, 1)$ et $B(p, r)$ ;
2. $]-1, 1[^n$ et $\mathbb{R}^n$ ;

3. $B(0,1)$ et $\mathbb{R}^n$ ;
4. $B(0,1)$ et $]-1,1[^n$ ;
5. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $B(0,2) \setminus \bar{B}(0,1)$ ;
6. $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ avec $n, m$ deux entiers ;
7. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{R}$ ;
8. $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$ et $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ (ici $n = 2$).

**Exercice 4. Difféomorphismes et changements de coordonnées.**

1. À tout point $p$ de l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$ du plan $\mathbb{R}^2$ on associe d'une part ses coordonnées cartésiennes $(x, y)$ et d'autre part ses coordonnées polaires $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times ]-\pi, \pi[$. Exprimer les coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées polaires, et montrer que l'application ainsi obtenue définit un difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times ]-\pi, \pi[$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$.
2. À tout point $p$ de $\mathbb{R}^n$ on associe d'une part ses coordonnées $(x_1, ..., x_n)$ dans la base canonique, et d'autre part ses coordonnées $(y_1, ..., y_n)$ dans une autre base. Exprimer les secondes en fonction des premières à l'aide d'une matrice de passage, et montrer que l'application correspondante définit un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.

**Exercice 5. La sphère comme sous-variété de $\mathbb{R}^3$.**

1. Donner les valeurs critiques de la fonction $\|.\|^2 : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. En déduire que la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que l'application
$$\begin{array}{rccc} \phi : & U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z > 0\} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x, y, \|(x,y,z)\|^2 - 1) \end{array}$$
induit un difféomorphisme sur son image. Quelle est l'image par $\phi$ de $\mathbb{S}^2 \cap U$ ? À l'aide d'autres applications du même type, retrouver le résultat de la question précédente.
3. Retrouver encore une fois ce résultat à l'aide de l'application
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \mapsto & (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}). \end{array}$$
On utilisera une troisième définition des sous-variétés. Faire le lien entre les questions 1 et 3 et le théorème des fonctions implicites.

**Exercice 6. Et si on enlève des hypothèses...**

1. (Si on enlève "submersion"...) Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-variétés de $\mathbb{R}^3$ : $\{(x,y,z)/x^2+y^2-z^2=0\}$ ? $\{(x,y,z)/x^2+y^2-z^2=1\}$ ?

2. (Si on enlève "immersion"...) Montrer que le graphe de $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$ n'est pas une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^2$.

3. (Si on enlève "homéomorphisme sur son image"...) Montrer que l'application $t \in ]-\pi,\pi[ \mapsto (\sin t, \sin t \cos t) \in \mathbb{R}^2$ est une immersion injective. Son image est-elle une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ ?

**Exercice 7. Le tore de révolution.** On appelle $T$ la surface de révolution obtenue en faisant tourner autour de l'axe $(Oz)$ le cercle $C_0 \subset \{y=0\}$ de centre $(2,0,0)$ et de rayon 1.

1. Trouver une équation de $T$ de la forme $F(x,y,z)=0$. En déduire que $T$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Montrer que le point $A = (\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, 0)$ appartient au tore et calculer l'espace tangent à T en $A$.

2. Retrouver ce résultat à l'aide de l'application

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (\theta,\phi) & \mapsto & ((2+\cos\theta)\cos\phi, (2+\cos\theta)\sin\phi, \sin\theta). \end{array}$$

   Recalculer le plan tangent en $A$ à l'aide de l'application $h$.

**Exercice 8. Un "autre" tore.**

1. Montrer que si $M$ et $N$ sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement, alors $M \times N$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{m+n}$ (naturellement identifié à $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$).

2. En déduire que $\mathbb{T}^n = (\mathbb{S}^1)^n$ est une sous-variété de $(\mathbb{R}^2)^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$. On verra dans un prochain exercice que $\mathbb{T}^2$ est difféomorphe au $T$ de l'exercice précédent, au sens des variétés.

**Exercice 9. Groupes classiques.**

1. Montrer que l'application déterminant de $M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ est de classe $C^1$ . Soit $A$ un élément de $Mat(n,\mathbb{R})$ On note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indices $(i,j)$ qui vaut 1. Calculer la dérivée de l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto \det(A+tE_{i,j})$. En déduire la différentielle de det en $A$.

2. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ et $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R})/\det(M)=1\}$ sont des sous-variétés de $M_n(\mathbb{R})$. Préciser leur dimension et expliciter leur plan tangent en $I_n$ puis en tout point.

3. Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \to & S_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tMM \end{array}$$

   est une submersion en tout point de $GL_n(\mathbb{R})$. En déduire que $O_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ dont on précisera la dimension et le plan tangent en $I_n$.