TD n° 3

Exercice 1. Soit G un groupe et $H \subset G$ un sous-ensemble.

1. Prouver que H est un sous-groupe de G si et seulement si $H \neq \emptyset$ et pour tous $h_1, h_2 \in H$, on a $h_1 \cdot h_2^{-1} \in H$.
2. Si H est un sous-groupe de G, est-ce que H est un groupe ?

Exercice 2. Dresser la liste des sous-groupes de G dans les cas suivants.

1. $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
2. $G = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
3. $G = S_3$.

Exercice 3. Soit G un groupe et $H_1, H_2 \subset G$ des sous-groupes.

1. Prouver que $H_1 \cap H_2$ est un sous-groupe de G.
2. Prouver que $H_1 \cup H_2$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H_1 \subset H_2$ ou $H_2 \subset H_1$.
3. Lorsque $G = \mathbb{Z}$, $H_1 = 5\mathbb{Z}$ et $H_2 = 7\mathbb{Z}$, calculer $H_1 \cap H_2$ et $H_1 \cup H_2$. Quel est le plus petit sous-groupe de $\mathbb{Z}$ contenant $H_1 \cup H_2$?

Exercice 4. Soit G un groupe. On note $Z(G) = \{g \in G \ \text{ tq } \ g \cdot h = h \cdot g \ \ \forall h \in G\}$.

1. Prouver que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.
2. On suppose que G contient un unique élément $x \neq e_G$ vrifiant $x^2 = e_G$. Prouver que $x \in Z(G)$.

Exercice 5. Soit G un groupe fini et $H \subset G$ un sous-ensemble.

1. Prouver que H est un sous-groupe de G si et seulement si $h_1 \cdot h_2 \in H$ pour tous $h_1, h_2 \in H$.
2. Donner un contre-exemple lorsque G n'est pas fini.

Exercice 6. Soient G et H des groupes et $\phi : G \to H$ un morphisme de groupes, c'est à dire une application ensembliste vérifiant $\phi(x *_G y) = \phi(x) *_H \phi(y)$ pour tous $x, y \in G$.

1. Prouver que $\phi(e_G) = e_H$ et que $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$ pour tout $x \in G$.
2. Prouver que $\mathrm{Ker}(\phi)$ est un sous-groupe de G et que $\mathrm{Im}(\phi)$ est un sous-groupe de H.
3. Prouver que ϕ est injectif si et seulement si $\mathrm{Ker}(\phi) = \{e_G\}$.

Exercice 7. Traduire en termes de morphismes de groupes les propriétés suivantes

1. $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$.
2. $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$.
3. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
4. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
5. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Exercice 8. On munit $\mathbb{C}^*$ de la multiplication. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que l'application $\phi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, z \mapsto z^n$ est un morphisme de groupe.
2. Cette application est-elle surjective ? Injective ? Quel est son noyau ?
3. Existe-t-il une application $\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ telle que $\sqrt[n]{z^n} = z$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$?

Exercice 9.

1. Déterminer tous les morphismes de groupes de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$. Lesquels sont injectifs, surjectifs, bijectifs ?
2. Déterminer tous les morphismes de groupes de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$. Lesquels sont injectifs, surjectifs, bijectifs ?

Exercice 10. Les groupes suivants sont-ils isomorphes ?

1. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$.
2. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$.
3. $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}^*$.
4. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}_+^*$.

Exercice 11.

1. Trouver le groupe ayant le plus petit cardinal possible.
2. Trouver un groupe non cyclique ayant le plus petit cardinal possible.
3. Est-il isomorphe à un sous-groupe de S_4 ? De A_4 ?
4. Trouver un groupe non abélien ayant le plus petit cardinal possible.
5. Est-il isomorphe à un sous-groupe de S_2 ? De S_3 ? De S_4 ? De S_n pour $n > 4$?

Exercice 12. Soit G un groupe et $g \in G$. On définit $\phi : \mathbb{Z} \to G, n \mapsto g^n$.

1. Vérifier que ϕ est un morphisme.
2. A quelle condition ϕ est-il surjectif ?
3. A quelle condition ϕ est-il injectif ?
4. Montrer qu'il existe un isomorphisme $\langle g \rangle \to \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ où $N \in \mathbb{N}$ est l'ordre de g (avec la convention que $N = 0$ si g n'est pas d'ordre fini).
5. En déduire un isomorphisme $\mu_N \to \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ pour tout $N \geq 1$, où on a noté $\mu_N = \{z \in \mathbb{C}^* \text{ tq } z^n = 1\}$.
6. Combien y-a-t-il de tels isomorphismes ?