TD n° 4

Glossaire : On note $\Sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite des réels, T_a la translation par a et R_θ la rotation d'angle θ dans le sens anti-horaire autour de l'origine.

Exercice 1. a) Montrer les formules suivantes.

1. $\Sigma \circ R_\theta = R_{-\theta} \circ \Sigma$.

2. $\Sigma \circ T_a = T_{\overline{a}} \circ \Sigma$.

3. $R_\theta \circ T_a = T_{R_\theta(a)} \circ R_\theta$.

b) En déduire que l'ensemble des bijections de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ ayant la forme

$$T_a \circ R_\theta \circ \Sigma^m, \quad a \in \mathbb{C}, \theta \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}$$

est un sous groupe de $S_{\mathbb{C}}$.

Exercice 2. 1. Une rotation d'angle π est dite un demi-tour. Montrer que la composée de deux demi-tours est une translation.

2. Montrer que si $u \in \mathbb{I}$ est indirecte, alors u^2 est une translation.

Exercice 3. 1. On suppose que $u \in \mathbb{I} \setminus \{\mathrm{id}\}$ est directe. Montrer que u est une rotation si et seulement si il existe un $c \in \mathbb{C}$ fixé par u.

2. On suppose que $u \in \mathbb{I} \setminus \{\mathrm{id}\}$ est indirecte. Montrer que u est une symétrie orthogonale si et seulement si il existe un $c \in \mathbb{C}$ fixé par u.

3. Déterminer si l'isométrie $u : z \mapsto \overline{z} + i$ est une symétrie orthogonale ou une symétrie glissée. Trouver l'axe et, le cas échéant, le vecteur de glissement.

4. Déterminer si l'isométrie $u : z \mapsto \overline{z} + 2i + 1$ est une symétrie orthogonale ou une symétrie glissée. Trouver l'axe et, le cas échéant, le vecteur de glissement.

5. Déterminer si l'isométrie $u : z \mapsto -i\overline{z} + 2 - i$ est une symétrie orthogonale ou une symétrie glissée. Trouver l'axe et, le cas échéant, le vecteur de glissement.

6. On sait que $T_a \circ \Sigma$ est une symétrie glissée pour tout $a \in \mathbb{R}$. Vrai ou faux : $T_a \circ \Sigma$ est une symétrie orthogonale pour tout $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Exercice 4 (La conjugaison dans $\mathbb{I}$)**.** 1. Montrer que $T_a \circ R_\theta \circ T_a^{-1}$ est la rotation autour de a d'angle θ.

2. Montrer que pour chaque $u \in \mathbb{I}$, $u \circ \Sigma_\Delta \circ u^{-1}$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $u(\Delta)$.

3. Utiliser la question 2. pour écrire sous la forme $z \mapsto a\Sigma(z) + b$ la symétrie orthogonal par rapport à $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x + y + 3 = 0\}$.

4. Vrai ou faux : Si g est une symétrie glissée, alors $u \circ g \circ u^{-1}$ est aussi une symétrie glissée.

Exercice 5. Soit X un sous-ensemble de $\mathbb{C}$. On écrit

$$\mathbb{I}(X) = \{u \in \mathbb{I} \,:\, u(X) = X\}.$$

Montrer que $\mathbb{I}(X)$ est un sous-groupe de $\mathbb{I}$.

Exercice 6 (Sous-groupes standards de $\mathbb{I}$)**.** [1]

1. Montrer que le sous-groupe des translations $\mathbb{T}$ est distingué dans $\mathbb{I}$.

2. Vrai ou faux : le sous-groupe $\mathbb{I}_0$ est distingué dans $\mathbb{I}$.

3. Vrai ou faux : L'ensemble des symétries orthogonales est un sous-groupe de $\mathbb{I}$.

Exercice 7 (Fonctions qui préservent la distance)**.** 1. Soit p et q deux points distincts de $\mathbb{C}$. Montrer que

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - p| = |z - q|\}.$$

est une droite. (Il est dans le programme de sixième que cette droite est la médiatrice du segment pq !)

2. Soit $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction qui préserve la distance, c'est-à-dire, $|F(z) - F(w)| = |z - w|$ et qui fixe trois points non colinéaires p_1, p_2 et p_3. Montrer que $F(z) = z$ pour tout z. [Indication : Montrer, à l'aide de la question 1, que si $F(z) \neq z$, alors p_1, p_2 et p_3 appartiennent à la même droite.]

3. Soit $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction qui préserve la distance. Montrer qu'il existe $u = T_a \circ R_\theta \circ \Sigma^m$ telle que $u(0) = F(0)$, $u(1) = F(1)$ et $u(i) = F(i)$. En déduire que toute F qui préserve la distance appartient au groupe $\mathbb{I}$.

4. Soit $\zeta = e^{2i\pi/3}$ une racine troisième de l'unité. On considère « le polygone » $P = \{1, \zeta, \zeta^2\}$. Utiliser la question 2. pour montrer que $\mathbb{I}(P)$, introduit à l'exercice 5, est isomorphe à S_3.

5. Utiliser la question 2. pour montrer que $\mathbb{I}(\{0, 2, i\})$ est isomorphe à un sous-groupe de S_3. Pouvez-vous déterminer son cardinal ?

Exercice 8. Si G est un groupe et x, y sont des éléments de G, le commutateur $[x, y]$ est l'élément $xyx^{-1}y^{-1}$.

1. Montrer que si $u, v \in \mathbb{I}$, alors $[u, v] \in \mathbb{I}^+$.

2. Montrer que si $u, v \in \mathbb{I}^+$, alors $[u, v] \in \mathbb{T}$.

3. Montrer que si $u, v \in \mathbb{T}$, alors $[u, v] = \mathrm{id}$.

1. Dans cet exercice, on admet connu le concept de sous-groupe distingué.

Exercice 9. Montrer que $\mathbb{I}^+$ est isomorphe au groupe

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \,:\, |a| = 1 \right\}$$

Exercice 10 (Un groupe triangulaire)**.** On considère le triangle Δ de la figure 1. On note k,

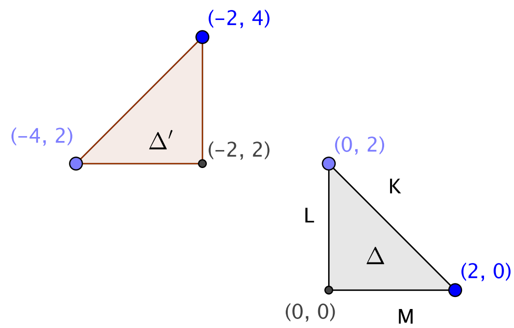

FIGURE 1 – Deux triangles

respectivement ℓ et m, la symétrie orthogonale par rapport à la droite K, respectivement L et M.

1. Un mot de l'alphabet $\{k, \ell, m\}$ est une isométrie ayant la forme

$$u_1 \circ \cdots \circ u_N,$$

telle que

- $*$ l'isométrie u_i appartient à $\{k, \ell, m\}$,
- $*$ N est un entier strictement positif arbitraire, et
- $*$ si $1 \leq i \leq N$, alors $u_i \neq u_{i+1}$.

Montrer que l'ensemble

$$\{\text{mots}\} \cup \{\text{identité}\}$$

est un sous-groupe de $\mathbb{I}$.

2. Montrer que pour chaque $u \in \mathbb{I}$ et chaque droite D, on a $u \circ \Sigma \circ u^{-1} = \Sigma_{u(D)}$.

3. Trouver le mot u qui satisfait $u(\Delta) = \Delta'$.

4. Pour chaque mot u, on peint le triangle $u(\Delta)$ en blanc si u est directe, et en noir si u est indirecte. Équisser le mosaïque obtenu.

Sous-groupes finis de $\mathbb{I}$

Exercice 11. 1. Soit $n > 1$ un entier et R la rotation centrée à l'origine et d'angle $2\pi/n$. Montrer que

$$C_n = \left\{\mathrm{id}, R, \ldots, R^{n-1}\right\}$$

est un sous-groupe de $\mathbb{I}_0^+$.

2. Soit G un sous-groupe fini du groupe des rotations $\mathbb{I}_0^+$ de $\mathbb{C}$. Montrer que si $n = |G|$, alors $G = C_n$. (Indication : Étudier le sous-groupe de G engendré par ≪ la plus petite rotation ≫.)

3. Soit $n \geq 1$ un entier, R la rotation d'angle $2\pi/n$ autour de l'origine. Montrer que

$$D_{2n} = \{\mathrm{id}, \ldots, R^{n-1}\} \cup \{\Sigma, R\Sigma, \ldots, R^{n-1}\Sigma\}$$

est un sous-groupe de $\mathbb{I}_0$.

4. Soit G un sous-groupe fini de $\mathbb{I}_0$. Montrer que $G \cap \mathbb{I}_0^+ = C_n$ pour un certain n. En déduire que soit $G = C_n$, soit G est *isomorphe* à D_{2n}. (Indication pour le cas $G \not\subset \mathbb{I}_0^+$: supposer d'abord que $\Sigma \in G$.)

5. Pouvez-vous exhiber un sous-groupe G de $\mathbb{I}_0$ différent de, mais isomorphe à D_8 ?

Exercice 12. Soit $G \subset \mathbb{I}$ un sous-groupe fini du groupe des isométries de $\mathbb{C}$. Soit

$$X = \{g(p) \,:\, g \in G\}.$$

l'orbite d'un point $p \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que X est fini et stable par G.

2. Soit $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Montrer que le barycentre

$$c = \frac{x_1 + \ldots + x_m}{m}$$

est fixé par G.

3. Montrer que G est soit isomorphe à C_n, soit isomorphe à D_{2n}.