Université Pierre et Marie Curie - UPMC — 2M175
Groupes de permutations et groupes d'isométries — 2016-2017

Contrôle continu 2

Les exercices peuvent être traités indépendamment. La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Aucun matériel (calculatrice, téléphone portable, etc.) ou document n'est autorisé. Le barème est donné à titre indicatif et pourra être légèrement modifié. Les questions plus longues ou difficiles sont marquée d'une ($\star$).
Durée : 45 minutes

Exercice 1. 1. Déterminer la liste des sous-groupes de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

2. Parmi les éléments de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, lesquels engendrent $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$?
3. Soit $(G,\star)$ un groupe et g un élément de G. Justifier que $(\langle g\rangle,\star)$ est un groupe abélien.
4. Existe-t-il $\sigma \in S_3$ tel que $S_3 = \langle\sigma\rangle$?
5. Donner un exemple de groupe de même cardinal (noté n) que S_3 engendré par l'un de ses éléments. Tous ses éléments différent du neutre sont-ils d'ordre n ?
6. Supposons que S_8 admette un élément d'ordre 10. Que peut-on dire de la longueur et du nombre des cycles de sa décomposition en cycles à supports disjoints? Donner un exemple de tel élément.

Exercice 2. 0. Rappeler la définition d'un morphisme de groupes $\phi : (G,\star_G) \to (H,\star_H)$, de son noyau $\mathrm{Ker}(\phi)$ et de son image $\mathrm{Im}(\phi)$.

Dans chacun des cas suivants, montrer que ϕ est un morphisme de groupes, déterminer son noyau, son image, et préciser s'il est injectif, surjectif, bijectif.

1. $\phi : \begin{array}{ccc} (\mathbb{Z},+) & \to & (\mathbb{R}_+^*,\times) \\ k & \mapsto & \alpha^k \end{array}$, où α est un réel strictement positif différent de 1 donné.
2. $\phi : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^*,\times) & \to & (\mathbb{R}^*,\times) \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$.
3. $\phi : \begin{array}{ccc} (\mathbb{Z},+) & \to & (S_{\mathbb{R}^2},\circ) \\ k & \mapsto & R_{k\pi/2} \end{array}$, où R_θ désigne la rotation d'angle θ autour de l'origine pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. Dans chacun des cas suivants, déterminer si le sous-ensemble H de G est un sous-groupe de $(G,\star)$ (on pourra éventuellement se servir de l'exercice précédent).

1. $H = \mathbb{R}_+^*$, $(G,\star) = (\mathbb{R}^*,\times)$;
2. $H = S_n \setminus A_n$, $(G,\star) = (S_n,\circ)$;
3. $H = \{2^k, k \in \mathbb{Z}\}$, $(G,\star) = (\mathbb{R}_+^*,\times)$;
4. $H = \{2^k, k \in \mathbb{N}\}$, $(G,\star) = (\mathbb{R}_+^*,\times)$;
5. $H = 3\mathbb{Z} \cup 7\mathbb{Z}$, $(G,\star) = (\mathbb{Z},+)$.

Exercice 4. Soit $(G,\cdot)$ un groupe et g un élément de G. On note $Z(g)$ le sous-ensemble $\{h \in G, h\cdot g = g\cdot h\}$.

1. Montrer que $Z(g)$ est un sous-groupe de G.
2. Dans le cas particulier $(G,\cdot) = (S_3,\circ)$, déterminer $Z(\tau)$ pour $\tau = (12)$.