4M322 - Géométrie différentielle

Année 2025-2026.

CC1 octobre 2025 : Durée 1h30

Les appareils électroniques sont interdits. Tout téléphone portable trouvé allumé pendant l'épreuve sera saisi. La qualité de la rédaction sera prise en compte. Les réponses injustifiées ne le seront pas. Le barème indiqué est approximatif. L'énoncé comporte deux pages. N'oubliez pas de tourner la page.

Notations

Etant donné un entier strictement positif n, on notera $Mat(n,\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices ayant n lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$. On le considère comme un espace vectoriel normé. On notera $[[1,n]]$ l'ensemble $\{i \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq n\}$.
Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé. Pour $a \in E$ et $\alpha > 0$, on note

$$B(a,\alpha) = \{x \in E,\ \| \ a - x \ \| < \alpha\}.$$

Si $f : A \to X$ est une application et B est un sous ensemble de A, la restriction de f à B sera notée $f_{|B}$.
Si $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et $x \in M$, on notera $T_x(M)$ l'espace tangent de M en x.

Exercice 1. Les ensembles suivants peuvent-ils être munis d'une structure de variété lisse ?

1. $M_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\}$;
2. $M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{x^2}{4} + y^2 < 1\}$;
3. $M_3 = \{(t, 1-t),\ t \in]0,1[\} \cup \{(t,t),\ t \in]0,1[\}$.

Solution :

1. M_1 est une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$. C'est une ellipse. Démonstration analogue au cercle. Elle est donc munie d'une structure de variété lisse naturelle de dimension 1.
2. M_2 est une variété lisse de dimension 2 puisque c'est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
3. M_3 n'est pas une variété lisse. Si c'était une variété lisse, ce serait une variété de dimension 1. Au voisinage du point $A = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, il existerait une boule ouverte $B(A,\epsilon)$ et un difféomorphisme $\phi : B(A,\epsilon) \to U$ sur ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $\phi(M_3 \cap B(A,\epsilon)) = I$. Comme $M_3 \cap B(A,\epsilon)$ est un ouvert connexe de M_3, son image par Φ est un ouvert connexe de $\mathbb{R}$, c'est à dire un intervalle de $\mathbb{R}$. Impossible puisque $M_3 - \{A\}$ a 4 composantes connexes alors que $I - \{\Phi(A)\}$) en a 2.

Exercice 2. Soit $E = Mat(n,\mathbb{R})$ muni d'une norme et $I_n \in E$ la matrice unité. En considérant $C : E \to E$, $C(A) = A^2$, montrer qu'il existe un réel $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ et une application lisse $\phi : B(I_n,\alpha) \to Mat(n,\mathbb{R})$ telle que pour toute matrice A de $B(I_n,\alpha)$, $\phi(A)^2 = A$.

Solution : On va appliquer le théorème d'inversion locale à la fonction $C : Mat(n,\mathbb{R}) \to Mat(n,\mathbb{R})$, $C(A) = A^2$ au voisinage de I. La différentielle de C en I est $dC_I = 2I$. Elle est donc inversible. Le théorème d'inversion locale nous assure qu'il existe un ouvert U contenant I tel que $C_{|U} : U \to C(U)$ soit un difféomorphisme. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $B(I,\alpha) \subset C(U)$. Alors, $(C_{|U})^{-1}$ répond à la question. En particulier, pour tout $A \in B(I,\alpha)$, $(C_{|U})^{-1}(A)$ est une racine carrée de A.

Exercice 3. 1. Montrer que $V = \{(t\cos(\theta), t\sin(\theta), \theta),\ (t,\theta) \in \mathbb{R}^2\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

2. Quel est son plan tangent en le point $(1, 1, \frac{\pi}{4}) \in V$?

Solution :

1. L'application
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (t,\theta) & \mapsto & (t\cos(\theta), t\sin(\theta), \theta) \end{array}$$
est injective. Sa matrice jacobienne en (t,θ) est
$$Jac_{(t,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -t\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & t\cos(\theta) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
C'est une matrice de rang 2. L'application f est donc une immersion en tout point de $\mathbb{R}^2$. Montrons que f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur V. Explicitons l'application f^{-1}. Soit $(x,y,z) \in V$.
$$f^{-1}(x,y,z) = (\frac{x}{\cos(z)}, z)\ si\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$
$$f^{-1}(x,y,z) = (\frac{y}{\sin(z)}, z)\ si\ z \neq k\pi$$

2. Le point $(1, 1, \frac{\pi}{4})$ est obtenu pour $t = \sqrt{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$. D'après le cours, le plan tangent est le plan engendré par les vecteurs colonnes de la matrice jacobienne, à savoir $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 4. Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous variété de dimension k de $\mathbb{R}^n$.

1. Rappeler quelle est la structure de variété sur M induite par sa structure de sous-variété de $\mathbb{R}^n$.
2. Soit $f : M \to \mathbb{R}^p$ une application de M dans $\mathbb{R}^p$. Montrer que f est lisse sur un voisinage d'un point x de M si et seulement si il existe une application F lisse définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant x et telle que $F_{|M\cap U} = f$

Solution :

1. voir cours.
2. Montrons que si f est lisse en en point x de M, alors il existe F définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ lisse et telle que $F_{|M\cap U} = f$. Soit $x \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant x et un difféomorphisme $\Phi : U \to \Phi(U)$ tel que $\Phi(U \cap M) = \Phi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{n-k}}\})$. Alors $f \circ \Phi^{-1} : \Phi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{n-k}}\}) \to \mathbb{R}^p$. On pose $G : \Phi(U) \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^p$, $G(X,Y) = f \circ \Phi^{-1}(X)$. On a alors $F = G \circ \Phi_{|U\cap M} = f$, ce qu'on recherchait.
   Montrons la réciproque. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel qu'il existe un diffeomorphisme $\Phi : U \to \Phi(U)$ satisfaisant $\Phi(U \cap M) = \Phi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times 0_{\mathbb{R}^{n-k}})$. Le diagramme ci dessous montre que l'injection $U \cap M \to U$, lue dans les cartes, n'est autre que l'injection $j : \phi(U \cap M) \to \phi(U) \cap$

$(\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{n-k}}\})$:

$$\begin{array}{ccc} U \cap M & \xrightarrow{\ i\ } & U \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \\ \Phi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times 0_{\mathbb{R}^{n-k}}) & \longrightarrow & \Phi(U) \end{array}$$

Comme j est lisse, i est lisse. On a $f = F \circ i$. Ainsi, f est lisse comme composée de fonctions lisses.

Exercice 5. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $A \in Mat(n, \mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n. Si $(i, j) \in [[1, n]]^2$, on note $A_{i,j}$ la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue à partir de A en supprimant la ième ligne et la jième colonne.

1. Quelle sont les coefficients de la matrice jacobienne de dét : $Mat(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ en un point A de $Mat(n, \mathbb{R})$?
2. Notons W l'ensemble des matrices dont le rang est supérieur ou égal à $n-1$. Montrer que W est un ouvert de $Mat(n, \mathbb{R})$.
3. Soit $\mathcal{M}$ le sous-ensemble de $Mat(n, \mathbb{R})$ constitué des matrices de rang $n-1$. Monter que $\mathcal{M}$ est une sous-variété de $Mat(n, \mathbb{R})$.

Solution :

1. Voir TD.
2. Notons $W_{i,j}$ l'ensemble des matrices A de de $Mat(n, \mathbb{R})$ telles que $det(A_{i,j}) \neq 0$. Comme l'application $\text{dét}_{i,j} : Mat(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \text{dét}(A_{i,j})$ est continue puisque polynomiale. Ainsi, $W_{i,j}$ est un ouvert puisque $W_{i,j} = (\text{dét}_{i,j})^{-1}(\mathbb{R}^\times)$. Comme, W est la réunion des $W_{i,j}$, W est un ouvert de $Mat(n, \mathbb{R})$.
3. $W \cap \text{dét}^{-1}(\{0\}) = \mathcal{M}$. Si A est de rang $n-1$, sa comatrice n'est pas la matrice nulle. La différentielle de dét en A est surjective puisque non nulle. Ainsi, par la caractérisation des sous-variétés par équation, $\mathcal{M}$ est une sous-variété de $Mat(n, \mathbb{R})$.

Exercice 6.

1. Soit $u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et $v : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ deux applications linéaires. On suppose
   — u et v sont surjectives ;
   — $\text{Ker}(u) + \text{Ker}(v) = \mathbb{R}^m$
   Montrer que l'application $(u, v) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ définie par : pour tout $x \in \mathbb{R}^m$,
   $$(u, v)(x) = (u(x), v(x))$$
   est surjective.
2. On suppose que $M \subset \mathbb{R}^m$ et $N \subset \mathbb{R}^m$ sont deux sous-variétés de $\mathbb{R}^m$ qui vérifient la condition suivante, dite condition de transversalité :
   $$\forall x \in M \cap N, \quad T_x(M) + T_x(N) = \mathbb{R}^m.$$
   Montrer que $M \cap N$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^m$.
3. La condition de transversalité est-elle nécessaire pour avoir $M \cap N$ sous-variété de $\mathbb{R}^m$?

Solution :

1. On remarque que $\mathrm{Ker}(u,v) = \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)$. On a donc

$$\begin{aligned} dim\,\mathrm{Ker}(u,v) &= dim\,\mathrm{Ker}(u) + dim\,\mathrm{Ker}(v) - dim(\mathrm{Ker}(u) + Ker(v)) \\ &= (m-n) + (m-p) - m \\ &= m - n - p \end{aligned}$$

   On en déduit par le théorème du rang que $dimIm(u,v) = n+p$ et donc (u,v) est surjective.

2. On note k (respectivement ℓ) la dimension de M (respectivement N). Soit $a \in M \cap N$.
   Les hypothèses nous donnent
   — U ouvert de $\mathbb{R}^m$, O ouvert de $\mathbb{R}^{m-k}$ contenant $0_{\mathbb{R}^{m-k}}$;
   — $u : U \to O$ une submersion en a vérifiant $u(a) = 0_{\mathbb{R}^{m-k}}$ et $u^{-1}\left(\{0_{\mathbb{R}^{m-k}}\}\right) = M \cap U$
   et
   — V ouvert de $\mathbb{R}^m$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^{m-\ell}$ contenant $0_{\mathbb{R}^{m-\ell}}$;
   — $v : V \to \Omega$ une submersion en a vérifiant $v(a) = 0_{\mathbb{R}^{m-\ell}}$ et $v^{-1}\left(\{0_{\mathbb{R}^{m-\ell}}\}\right) = N \cap V$
   On a déduit, en utilisant la première question, l'existence d'une submersion à savoir $(u,v) : U \cap V \to O \times \Omega$ vérifiant : $(u,v)(a) = 0_{\mathbb{R}^{2m-(k+\ell)}} \in O \times \Omega$ et $(u,v)^{-1}\left(\{0_{\mathbb{R}^{2m-k-\ell}}\}\right) = (M \cap N) \cap (U \times V)$.
   Ce qui démontre que $M \cap N$ est une sous variété de $\mathbb{R}^m$.

3. La condition de transversalité n'est pas nécessaire. Il suffit de prendre $M = N$ pour avoir un contrexemple.