

Feuille 4 Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$

Exercice 1 L'hypothèse sur f implique en particulier que $f(0) \leq 0$, ie $f(0) = 0$
Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = f(0) + 0 + o(\|x\|)$ et $f(x) = o(\|x\|)$

Autrement dit, f a un DL(1) en $0_{\mathbb{R}^n}$ ($\mathcal{O}_{\mathbb{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}^{(1)}(x)$) (forme linéaire nulle)
Par définition de la différentielle, f est donc différentiable en $0_{\mathbb{R}^n}$ et
sa différentielle est (la forme linéaire) nulle.

Exercice 2 1) Soit $a \in \mathbb{R}^n \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$, $u(a+h) = u(a) + u(h)$ (par linéarité)
 $= u(a) + u(h) + o(\|h\|)$

Comme u est linéaire et continue (automatique en dim finie)
Cela signifie que u est différentiable en a et que sa différentielle
en a , Df_a , est elle-même.

2) Soit $a \in \mathbb{R}^n \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$, $f(a+h) = \langle u(a+h), a+h \rangle$
 $= \langle u(a) + u(h), a+h \rangle$ (linéarité de u)
 $= \langle u(a), a \rangle + \langle u(a), h \rangle + \langle u(h), a \rangle + \langle u(h), h \rangle$
(linéarité de $\langle, \rangle$)
 $= f(a) + L(h) + r(h)$

avec $L(h) = \langle u(a), h \rangle + \langle u(h), a \rangle$ et $r(h) = \langle u(h), h \rangle$

• $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire (par linéarité de u et linéarité à gauche et à droite de $\langle, \rangle$)

et automatiquement C^0 (dimension finie)

• $\forall h \in \mathbb{R}^n \quad |r(h)| = |\langle u(h), h \rangle| \leq \|u(h)\| \times \|h\|$ (Cauchy-Schwarz)
 $\leq \|u\| \times \|h\| \times \|h\|$ (continuité de u)

$$= \|u\| \times \|h\|^2 = o(\|h\|)$$

Donc par définition de la différentielle, f est différentiable en a et $Df_a = L$ admet.

Exercice 3 1. f est rationnelle sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (bien définie) donc C^∞

Reste à étudier la continuité en $(0,0)$.

$$\forall (x,y) \in U, |f(x,y)| = |y| \underbrace{\left| \frac{x^2}{x^2+y^2} \right|}_{\leq 1} \leq |y| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 = f(0,0)$$

Donc f est continue en $(0,0)$, et finalement f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. (a) déjà vu (C^∞ implique en particulier différentiable)

$$(b) \forall (x,y) \in U, \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, Df_{(x,y)}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot u + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot v$$

$$\text{avec } \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^2) - x^2y \times 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\text{et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2(x^2+y^2) - x^2y \times 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$(c) \text{ soit } \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$\frac{f((0,0)+t\vec{v}) - f(0,0)}{t} = \frac{f(tu, tv)}{t} = \frac{1}{t} \times \frac{t^3 u^2 v}{t^2 (u^2+v^2)} = \frac{u^2 v}{u^2+v^2} (= f(u,v))$$

Donc cette quantité admet une limite qd $t \neq 0$, $f(u,v)$, donc f admet une dérivée dans la direction $\vec{v}$, et ce pour tt vecteur $\vec{v}$ non nul.

(d) Si f était différentiable en l'origine, la dérivée directionnelle selon un vecteur (u,v) en $(0,0)$ serait $Df_{(0,0)}(u,v)$, linéaire en (u,v) . Or $(u,v) \mapsto \frac{u^2 v}{u^2+v^2}$ n'est pas linéaire. Donc f n'est pas différentiable à l'origine.
(dérivée directionnelle calculée à la q. précédente)

Exercice 4 1) Soit $(M, N) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$. $\forall (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2$,
 $(x_{ij})_{i,j \in m}$ " " $(y_{ij})_{i,j \in m}$

$$\begin{aligned} |(MN)_{ij}| &= \left| \sum_{k=1}^m x_{ik} y_{kj} \right| \leq \sum_{k=1}^m |x_{ik}| |y_{kj}| \\ &\leq \sum_{k=1}^m \|M\| \|N\| \\ &\leq m \|M\| \|N\| \end{aligned}$$

Donc $\|MN\| \leq m \|M\| \|N\|$

2) Soit $(M, H) \in M_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \varphi(M+H) &= {}^t(M+H) \cdot (M+H) = {}^t M M + {}^t M H + {}^t H M + {}^t H H \\ &= \varphi(M) + L_M(H) + \kappa(H) \end{aligned}$$

avec $L_M: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ linéaire (à vérifier) continue (autom)
 $H \mapsto {}^t M H + {}^t H M$

$$\text{et } \|\kappa(H)\| = \|{}^t H H\| \leq m \underbrace{\|{}^t H\|}_{=\|H\|} \cdot \|H\| = m \|H\|^2 = o(\|H\|)$$

Donc par définition de la différentielle en un point, φ est différentiable
 en M et

$$\begin{aligned} D\varphi_M &= M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ H &\mapsto {}^t M H + {}^t H M \end{aligned}$$

Exercice 5 1) Si $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$, $\det(M) = \sum_{\sigma \in S_m} \varepsilon(\sigma) m_{1, \sigma(1)} \cdots m_{m, \sigma(m)}$

où S_m désigne l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, m\}$ et
 pour $\sigma \in S_m$, $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de σ ($\in \{\pm 1\}$)
 Ainsi l'appli $\det$ est polynomiale en les coeff donc $\mathcal{C}^1$.

Si on note m_{ij} les coordonnées en $M_n(\mathbb{R})$ associées à la base canonique (E_{ij}) des matrices élémentaires, pour tout $(ij) \in \{1, m\}^2$,

$$\frac{\partial \det}{\partial x_{ij}}(I) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\det(I + tE_{ij}) - \det(I)}{t}$$

si $i=j$, $I + tE_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1+t & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} = 1+t$

et si $i \neq j$ $I + tE_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & t & & & 1 \end{pmatrix}$, de $\det = 1$

Donc $\forall i \in \{1, m\}$, $\frac{\partial \det}{\partial x_{ii}}(I) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1+t - 1}{t} = 1$

et $\forall i \neq j \in \{1, m\}^2$, $\frac{\partial \det}{\partial x_{ij}}(I) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1-1}{t} = 0$

Finalement,
$$D\det_I \begin{pmatrix} H \\ (h_{ij}) \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq i, j \leq m} \frac{\partial \det}{\partial x_{ij}}(I) \cdot h_{ij} = \sum_{i=1}^m 1 \times h_{ii} \text{ (les autres termes de la somme sont nuls)} = \text{Tr}(H)$$

3. Soit maintenant $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $H \in M_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \det(A+H) &= \det(A \times (I + A^{-1}H)) = \det(A) \det(I + A^{-1}H) \\ &= \det(A) \left(1 + \text{Tr}(A^{-1}H) + o(\|A^{-1}H\|) \right) \\ &\quad \text{car } A^{-1}H \xrightarrow{H \rightarrow 0} 0 \\ &= \det(A) + \det A \text{Tr}(A^{-1}H) + \det A o(\|A^{-1}H\|) \end{aligned}$$

$$\text{or } \frac{\det A \times o(\|A^{-1}H\|)}{\|H\|} = \underbrace{\frac{o(\|A^{-1}H\|)}{\|A^{-1}H\|}}_{\xrightarrow{H \rightarrow 0} 0 \text{ par def de } o(\cdot)} \times \det A \times \underbrace{\frac{\|A^{-1}H\|}{\|H\|}}_{\leq m \|A^{-1}\|}$$

si on a choisi la norme de l'eqo précédent

Donc cette q^{te} est un $o(\|H\|)$

Finalement, comme $H \mapsto \det(A) \text{Tr}(A' H)$ est linéaire, on en déduit

$$\text{Tr}(\overset{''}{\det A} A' H)$$

$$\text{Tr}(\overset{''}{\tilde{A}} H)$$

que c'est la différentielle de $\det$ en A .

4. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ $\chi_A(x) = \det(A - x I_n)$ est un polynôme mon réel donc a un nb fini de racines. Donc pour $\forall k \geq k_0$ assez gd,

$\chi_A(\frac{1}{k}) \neq 0$, ie $A - \frac{1}{k} I_n$ est inversible. Or $(A - \frac{1}{k} I_n)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers A ($\|A - (A - \frac{1}{k} I_n)\| = \frac{1}{k} \|I_n\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$), donc A est limite d'une suite de matrices inversibles.

Ainsi, $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$, $(M_k)_k$ une suite de matrices inversibles tendant vers M et $H \in M_n(\mathbb{R})$. Comme $\det$ est C^1 , $\lim_{k \rightarrow +\infty} D\det_{M_k}(H) = D\det_M(H)$

(l'écrit avec les dérivées partielles continues pour s'en convaincre)

donc $D\det_M(H) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \text{Tr}(\tilde{M}_k H)$ d'après 3. (*)

Or l'application $A \mapsto \tilde{A}$ est continue de $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$ (les coeff de $\tilde{A}$ sont des mineurs de $A \times (\pm 1)$, donc des fct° polynomiales des coeff de A), donc l'application $A \mapsto \tilde{A} H$ aussi (H est fixée ici) et Tr est linéaire donc continue donc $A \mapsto \text{Tr}(\tilde{A} H)$ est continue (so finit en coordonnées si on préfère). Donc finalement, comme

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} M_k = M, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \text{Tr}(\tilde{M}_k H) = \underline{\text{Tr}(\tilde{M} H)}, \quad \text{ce qui conclut.}$$

exercice 6

$$1. g = f \circ \varphi \quad \text{ou} \quad \varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(p, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} p \cos \theta \\ p \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \varphi_1(p, \theta) & \varphi_2(p, \theta) \end{matrix}$$

$$\bullet \frac{\partial g}{\partial p}(p, \theta) = Df_{\varphi(p, \theta)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p}(p, \theta) \right) \quad \left(\text{En effet, } \frac{\partial g}{\partial p}(p, \theta) = Dg_{(p, \theta)}(e_1) \text{ par def des dérivées partielles} \right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(p, \theta)) \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial p}(p, \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(p, \theta)) \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial p}(p, \theta)$$

$$\frac{\partial g}{\partial p}(p, \theta) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(p \cos \theta, p \sin \theta)}_{h(p, \theta)} \cdot \cos \theta + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(p \cos \theta, p \sin \theta)}_{k(p, \theta)} \cdot \sin \theta$$

$$\begin{aligned} &= D(f \circ \varphi)_{(p, \theta)}(e_1) \\ &= (Df_{\varphi(p, \theta)} \circ D\varphi_{(p, \theta)})(e_1) \\ &= Df_{\varphi(p, \theta)} \left(\underbrace{D\varphi_{(p, \theta)}(e_1)}_{\frac{\partial \varphi}{\partial p}(p, \theta)} \right) \end{aligned}$$

$$\bullet \frac{\partial g}{\partial \theta}(p, \theta) = Df_{\varphi(p, \theta)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(p, \theta) \right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(p, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(p \cos \theta, p \sin \theta) \cdot (-p \sin \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(p \cos \theta, p \sin \theta) \cdot p \cos \theta$$

$$\bullet \frac{\partial^2 g}{\partial p^2}(p, \theta) = \frac{\partial h}{\partial p}(p, \theta) \cos \theta + \frac{\partial k}{\partial p}(p, \theta) \sin \theta$$

(on applique à h et k le calcul précédent)

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\cdot) \cos \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\cdot) \sin \theta \right) \cos \theta + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\cdot) \cos \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\cdot) \sin \theta \right) \sin \theta$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\cdot) \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\cdot) \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\cdot) \sin^2 \theta \quad (*)$$

$$\bullet \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(p, \theta) = \frac{\partial h}{\partial \theta}(p, \theta) (-p \sin \theta) + h(p, \theta) (-p \cos \theta) + \frac{\partial k}{\partial \theta}(p, \theta) p \cos \theta - k(p, \theta) p \sin \theta$$

$$= p \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\cdot) (-p \sin \theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\cdot) p \cos \theta \right) \times (-\sin \theta) + \frac{\partial f}{\partial x}(\cdot) (-\cos \theta) \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\cdot) (-p \sin \theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\cdot) p \cos \theta \right) \cos \theta - \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot) \sin \theta \right]$$

$$= p^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\cdot) \sin^2 \theta - 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\cdot) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\cdot) \cos^2 \theta \right) - p \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\cdot) \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot) \sin \theta \right)}_{\frac{\partial g}{\partial p}(p, \theta)}$$

$$2) \text{ la dernière formule donne : } \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(p, \theta) + \frac{1}{p} \frac{\partial g}{\partial p}(p, \theta) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\cdot) \sin^2 \theta - 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\cdot) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\cdot) \cos^2 \theta$$

(*)

En sommaris (x_1) et (x_2) , on obtient :

$$\Delta f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2}(\rho, \theta) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(\rho, \theta) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta)$$

Exercice 7 Toutes les fonctions considérées sont de classe C^1 . En effet, les quatre premières sont polynomiales en x, y , et pour la dernière :

• $p_1(x, y) \mapsto x$ et $p_2(x, y) \mapsto y$ sont C^∞ car linéaires (en donc finie)

• $(x, y) \mapsto \varphi = \exp(x) = \exp \circ p_1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ avec $p_1 \in C^\infty$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\exp \in C^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

donc par composition, $\varphi \in C^\infty$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

• de façon similaire, $(x, y) \mapsto e^y$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ par composition

• $(x, y) \mapsto x e^y$ et $(x, y) \mapsto y e^x$ sont C^∞ comme produits de telles fonctions et enfin $(x, y) \mapsto x e^y + y e^x$ est C^∞ comme somme de telles fonctions.

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^3$. $\nabla f(x, y) = (2x + 3x^2, 2y)$ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

donc $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3x^2 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2 + 3x) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) = (0, 0) \\ \text{ou} \\ (x, y) = (-\frac{2}{3}, 0) \end{cases}$

Les points critiques de f sont donc $(0, 0)$ et $(-\frac{2}{3}, 0)$

$\text{Hess}_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x + 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

En particulier $\text{Hess}_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ qui a 2 p.p. $\neq 0$ double donc $(0, 0)$ est un min local.

$\text{Hess}_f(-\frac{2}{3}, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ qui a des p.p. de signes opposés donc $(-\frac{2}{3}, 0)$ est au point selle.
donc f n'admet pas d'extremum global.

b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla f(x, y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x)$ donc

$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = x^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x(x^3 - 1) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } 1 \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow ((x, y) = (0, 0) \text{ ou } (x, y) = (1, 1))$

Donc f a deux points critiques $(0,0)$ et $(1,1)$.

$$\text{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

En particulier, $\text{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, de déterminant $-9 < 0$. Donc $(0,0)$ est un pt selle.

$\text{Hess} f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$, de déterminant $27 > 0$. Et de trace $12 > 0$ donc $(1,1)$ est un

minimum local.

$$\text{Rq } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x,1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 3x + 1 = +\infty$$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x,1) = -\infty$ donc f n'a pas d'extremum global.

c) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$

$$\nabla f(x,y) = (2x + y + 2, x + 2y + 3)$$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y - 4 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{4}{3} \\ x = -2y - 3 = +\frac{8}{3} - \frac{9}{3} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Donc f a pour unique point critique $(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$

$$\text{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ de det } 3 > 0 \text{ et de trace } 4 > 0 \text{ donc } f \text{ admet en } (-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}) \text{ un } \underline{\text{min local}}.$$

(indépendant de x,y . C'est normal, f est polynôme de degré 2)

$$\text{Rq : On a : } f(-\frac{1}{3} + h, -\frac{4}{3} + k) = f(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}) + {}^t \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(\|(h,k)\|^2)$$

Mais en fait, vu que f est un polynôme de degré 2, on a exactement l'égalité sans $o(\)$, ou encore :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = f(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}) + {}^t \begin{pmatrix} x + \frac{1}{3} \\ y + \frac{4}{3} \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} x + \frac{1}{3} \\ y + \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

(le vérifier !)

≥ 0
car H est définie positive
dès ses valeurs propres

Ainsi, $(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$ est en fait un minimum global.

$$(d) f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$$

$$\nabla f(x,y) = (4x^3 - 4y, 4y^3 - 4x)$$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y = 0 \\ y^3 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x = y^3 = x^9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x(x^8 - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, 1 \text{ ou } -1 \\ \text{et } y = x^3 \end{cases} \quad \text{seules racines réelles de } x^8 - 1$$

$$\Leftrightarrow (x,y) = (0,0) \text{ ou } (1,1) \text{ ou } (-1,-1)$$

f a donc 3 pts critiques $(0,0)$, $(1,1)$ et $(-1,-1)$

$$\text{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -1 \\ -1 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\text{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, de $\det < 0$, donc $(0,0)$ est un point selle.

$\text{Hess} f(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}$, de $\det > 0$ et de $\text{Tr} > 0$, donc $(1,1)$ sont des min locaux.
et $(-1,-1)$

$$\text{Hess} f(-1,-1)$$

On peut en fait montrer que ce sont des min globaux. Une façon de faire est d'utiliser l'exercice 8 de la feuille de topo: f est coercive

$\left(\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty \right)$ sur $\mathbb{R}^2$ donc admet un min global. Celui-ci est nécessairement atteint en un pt critique de f vu que f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Il est donc $(0,0)$ (pt selle) donc c'est $(1,1)$ ou $(-1,-1)$, or f prend la même valeur en ces 2 pts et cette valeur est le min global de f sur $\mathbb{R}^2$.

$$(e) f(x,y) = xe^y + ye^x$$

$$\nabla f(x,y) = (e^y + ye^x, e^x + xe^y)$$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} e^y + ye^x = 0 \\ xe^y + e^x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^y + ye^x = 0 \\ e^x(1-xy) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} l_1 \leftrightarrow l_2 \\ \Leftrightarrow \\ x, e^x \neq 0 \end{matrix} \begin{cases} xy = 1 \text{ (en particulier } xy \neq 0) \\ e^y + ye^x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ y = \frac{1}{x} \\ e^{1/x} + \frac{e^x}{x} = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Étudions la 2^e équation. Elle ne peut avoir que des solutions $x \leq 0$ (sinon $e^{1/x} > 0$ et $\frac{e^x}{x} > 0$)

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, e^{1/x} + \frac{e^x}{x} = 0 \Leftrightarrow e^{1/x} = -\frac{e^x}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = x - \ln(-x)$$

$$\Leftrightarrow 1 = x^2 - x \ln(-x)$$

-1 est solution de cette équation. Voyons si c'est la seule. Soit $g: \mathbb{R}_-^* \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2 - x \ln(-x)$

g est C^1 sur $\mathbb{R}_-^*$ par composition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ par comparaisons

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, g'(x) = 2x - \left(\ln(-x) + x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) \right) = 2x - \ln(-x) - 1$$

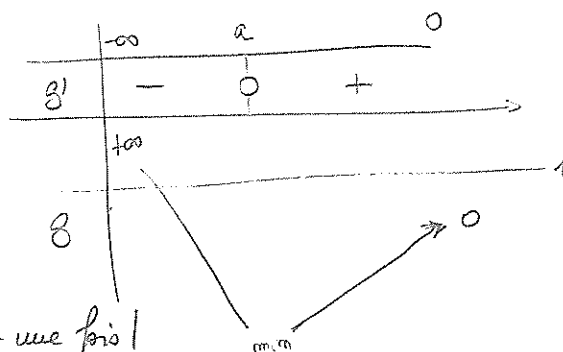
$$g''(x) = 2 - \frac{1}{x} > 0 \text{ sur } \mathbb{R}_-^*, \text{ donc } g' \text{ est strictement croissante,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g'(x) = +\infty \text{ par comparaisons}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) = +\infty.$$

Donc g' s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}_-^*$, en un pt $a < 0$.
 (TVI) (strict croissant)

Donc g a une variation



Donc g prend la valeur 1 au + une fois!

Ainsi pour revenir à notre fonction f , $\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{1}{x} = -1 \end{cases}$

Donc le seul pt critique de f est $(-1, -1)$

En outre $\text{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} ye^x & e^y + e^x \\ e^y + e^x & xe^y \end{pmatrix}$

Donc $\text{Hess} f(-1, -1) = \begin{pmatrix} -e^{-1} & 2e^{-1} \\ 2e^{-1} & -e^{-1} \end{pmatrix}$ $\det = e^{-2} - 4e^{-1} = \underbrace{e^{-1}}_{>0} (\underbrace{e^{-1} - 4}_{<0}) < 0$

Donc $(-1, -1)$ est un point selle.

Exercice 8 1) Étudions les variations de g . Cette fonction est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $g' : x \mapsto \frac{1}{x} + 2$ strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc

g est strictement croissante. En outre $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$, et

$g(\frac{1}{e}) = \ln(\frac{1}{e}) + \frac{2}{e} + 1 > 0$. Il existe donc une unique $a \in]0, \frac{1}{e}[$ (stricte croissance)

tg $g(a) = 0$; et $\forall x \geq \frac{1}{e}$, $g(x) \geq g(\frac{1}{e}) > 0$. Finalement, l'équation $g(x) = 0$ admet bien une unique solution a sur $\mathbb{R}_+^*$ et celle-ci appartient à $]0, \frac{1}{e}[$ (c'est comme cela qu'il fallait comprendre la question).

2. On considère le caractère C^1 de f sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ comme dans l'exercice précédent.

(x,y) est un pt critique de $f \Leftrightarrow \nabla f(x,y) = (0,0)$

sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ or $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $\nabla f(x,y) = \left(\ln x + x + y^2 + x\left(\frac{1}{x} + 1\right), 2xy \right)$
 $= \left(\ln x + 2x + 1 + y^2, 2xy \right)$

Donc $\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy = 0 \\ \ln(x) + 2x + 1 + y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \ln(x) + 2x + 1 = 0 \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}_+^*)$

Donc l'unique point critique de f est $(a, 0)$.

$$3) \text{ Hess} f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} + 2 & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \text{ donc } \text{Hess} f(a, 0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} + 2 & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$$

de déterminant $2a\left(\frac{1}{a} + 2\right) = 2(1 + 2a) > 0$ et de trace $\frac{1}{a} + 2 + 2a > 0$, donc

f admet en $(a, 0)$ un minimum local qui vaut

$$f(a, 0) = a(\ln(a) + a) \quad , \text{ or } \ln(a) + 2a + 1 = 0 \text{ par def de } a \text{ donc}$$

$$\boxed{f(a, 0) = -a(a+1)}$$

Exercice 9

Notons x la longueur d'un des côtés de l'angle droit. Alors le 2^e est de longueur $s - x$ si l'on veut que la somme de ces 2 côtés soit s (en particulier, $x \in [0, s]$), et l'aire du triangle est alors $A(x) = \frac{x(s-x)}{2}$.

Il s'agit donc simplement de déterminer où A atteint un éventuel max. En l'occurrence A est un trinôme du 2nd degré à coeff dominant $-1 < 0$, donc elle admet effectivement un unique max en $-\frac{b}{2a}$ (si on écrit $A(x) = ax^2 + bx + c$), ie en $\frac{s}{2}$.

Autrement dit, parmi tous les triangles rectangles dont la somme des côtés de l'angle droit est s , ceux dont l'aire est maximale sont les triangles rectangles isocèles (tous semblables).

Exercice 10 On considère la fonction $f: E \rightarrow \mathbb{R}$

$$p = (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^3 d(p, p_i)^2 = \sum_{i=1}^3 ((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2)$$

où on a noté (x_i, y_i) les coordonnées de p_i pour $i = 1$ à 3 .

Il s'agit de déterminer où f atteint un éventuel minimum.

f est polynomiale donc C^∞ . Déterminons ses points critiques.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla f(x,y) = \left(2 \sum_{i=1}^3 (x-x_i), 2 \sum_{i=1}^3 (y-y_i) \right)$$

Donc (x,y) est un pt critique de $f \Leftrightarrow \nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} \\ y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3} \end{cases}$

Ainsi l'unique point critique de f est l'isobarycentre des pts p_1, p_2, p_3 .

Comme dans l'exercice 7.d., on peut conclure directement en montrant que f est convexe (à faire ...) sur $\mathbb{R}^2$ tout entier donc admet un min global, qui est mécaniquement un point critique, donc finalement le pt à rechercher est l'isobarycentre des pts p_1, p_2, p_3 ou encore le centre de gravité du triangle $p_1 p_2 p_3$.

Exercice 11 On suppose bien sûr $V > 0$ (un ^{vrai} parallélépipède (non dégénéré) est de vol > 0)

On va commencer par le cas $V=1$ et on conclura à l'aide d'homothéties. Le volume d'un para. de longueur x^0 , largeur y^0 et hauteur z^0 est xyz . (les 3 notions ne sont pas bien définies mais peu importe car le volume est inchangé si on les échange). Si on fixe le volume égal à 1, alors on a par exemple $z = \frac{1}{xy}$, et l'axe du para. est donnée

par $A = 2xy + 2yz + 2xz = 2xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y} = 2\left(xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$

Il s'agit donc de déterminer l'éventuel minimum de la fonction

$$f: (\mathbb{R}_+^*)^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

Cette fonction est rationnelle donc C^2 . Si elle admet un min en un pt $a \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, ce doit être un pt critique -

$$(x,y) \text{ est un pt critique de } f \Leftrightarrow \nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \left(y - \frac{1}{x^2}, x - \frac{1}{y} \right) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x^2} \\ x = \frac{1}{y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x^2} \\ x = \frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2} = x^4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - 1) = 0 \\ y = \frac{1}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \quad (x \neq 0) \\ y = 1 \end{cases}$$

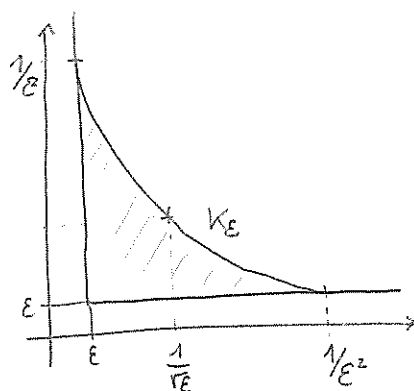
Comment montrer que f atteint bien un minimum en ce pt ?

Idee: " $\lim_{(x,y) \rightarrow \text{"bord de } (\mathbb{R}_+^*)^2} f(x,y) = +\infty$ " puis raisonner comme avec les fonctions convexes

Pb

qu'est-ce que ça veut dire ?

Voici une façon de le formaliser :



$$\text{Notons } K_\epsilon = \left\{ (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mid x \geq \epsilon, y \geq \epsilon \text{ et } xy \leq \frac{1}{\epsilon} \right\}$$

Cet ensemble, représenté ci-dessus, est compact (fermé et borné $\leftarrow$ à justifier) dans $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension finie.

On remarque que si $(x,y) \notin K_\epsilon$,

soit $x < \epsilon$, auquel cas $f(x,y) \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{\epsilon}$

Soit $y < \epsilon$ ————— $f(x,y) \geq \frac{1}{y} > \frac{1}{\epsilon}$ (cf pour l'autre)

Soit $xy > \frac{1}{\epsilon}$ ————— $f(x,y) \geq xy > \frac{1}{\epsilon}$

Or $f(1,1) = 1$ donc en prenant $\epsilon < 1$, si f admet un min sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ alors celui-ci est nécessairement atteint dans K_ϵ car en dehors, $f(x,y) > 1$.

Or K_ϵ est compact et f continue donc elle admet effectivement un min sur K_ϵ . Comme c'est aussi un min sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ qui est un ouvert, c'est nécessairement un point singulier, or il n'y en a qu'un !

On conclut ainsi que f atteint un unique minimum en $1,1$, donc que Parmi les parallélépipèdes de volume 1, celui dont l'axe est minimale est le cube de côté 1 ($x=y=1$ et $xyz=1 \Rightarrow z=1$)

Soit maintenant $V > 0$ quelconque. Un parallélépipède P de volume V est d'axe minimale ssi l'image $h_{\sqrt[3]{V}}(P)$ de P par une homothétie de rapport $\frac{1}{\sqrt[3]{V}}$ est un parallélépipède de volume 1 d'axe minimale, puisque l'application $\text{Axe}(h_{\sqrt[3]{V}}(P)) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{V}}\right)^2 \text{Axe}(P)$ et que l'application $a \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt[3]{V}}\right)^2 a$ est strictement croissante. Ainsi, l'unique parallélépipède de volume V et d'axe minimale est le cube de côté $\sqrt[3]{V}$.

Exercice 12

1) a. Il s'agit déjà de déterminer l'ouvert le plus grand possible sur lequel f est injective.

déjà, notons que $f(x,y) = f(y,x) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ donc U ne peut contenir 2 points symétriques (x,y) et (y,x) avec $x \neq y$ par rapport à la première bissectrice Δ . Prenons donc $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x < y\}$.

Soit maintenant $(b,c) \in \mathbb{R}^2$ et $(x,y) \in U$.

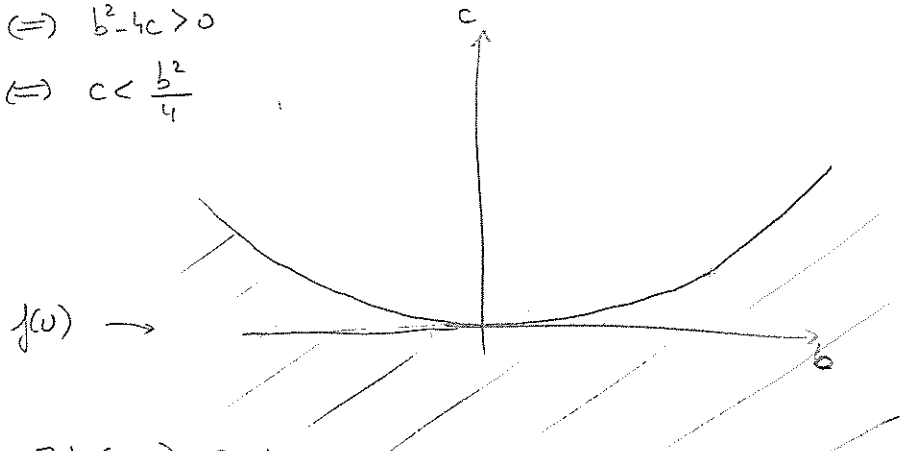
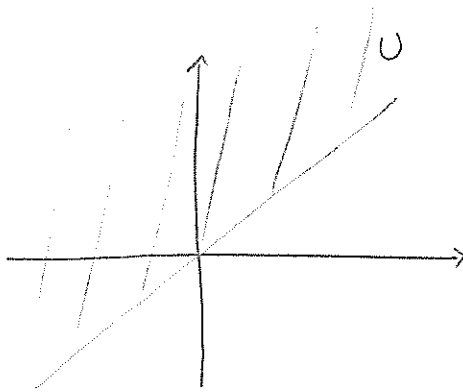
$$f(x,y) = (b,c) \Leftrightarrow (x+y, xy) = (b,c) \Leftrightarrow (X+x)(X+y) = X^2 + bX + c$$

$\Leftrightarrow -x$ et $-y$ sont les racines de $X^2 + bX + c$

Donc $(b,c) \in f(U) \Leftrightarrow X^2 + bX + c$ eu 2 racines réelles distinctes

$$\Leftrightarrow b^2 - 4c > 0$$

$$\Leftrightarrow c < \frac{b^2}{4}$$



et $\forall (b,c) \in f(U), \exists ! (x,y) \in U$ tq

$(b,c) = f(x,y) : -x$ est la + grde des 2 racines distinctes et $-y$ la + petite.

f définit donc une bijection de U dans $f(U)$

• f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ (ses composantes sont polynomiales) donc sur U .

Pour conclure que f est un C^1 difféo, on peut soit exprimer explicitement son inverse et montrer qu'elle est C^1 , soit utiliser le thm d'immersion locale.

Méthode 1 : D'après ce qui précède, $\forall (b,c) \in f(U)$,

$$f^{-1}(b,c) = \left(-\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \right), -\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \right) \right)$$

$$= \left(\frac{b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \frac{b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \right)$$

Les 2 composantes sont des fonctions C^1 de (b,c) sur $f(U)$ où $b^2 - 4c > 0$.
par composition.

Méthode 2 $\text{Jac} f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$ de déterminant $x-y \neq 0$. la différentielle de f est inversible en tout point de U , donc f est un difféo local en $\forall$ pt de U , et comme elle est bijective de U dans $f(U)$, c'est un difféo global.

Au l'énoncé, c'est plutôt la méthode d'qui était attendue.

$$(b) \quad \frac{\partial (f^{-1})_1}{\partial x}(b, c) = \frac{1 - \frac{2b}{2\sqrt{b^2-4c}}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{b}{2\sqrt{b^2-4c}}$$

$$\frac{\partial (f^{-1})_1}{\partial y}(b, c) = -\frac{1}{2} \frac{-4}{2\sqrt{b^2-4c}} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4c}}$$

$$\frac{\partial (f^{-1})_2}{\partial x}(b, c) = \frac{1}{2} + \frac{b}{2\sqrt{b^2-4c}}$$

$$\frac{\partial (f^{-1})_2}{\partial y}(b, c) = -\frac{1}{\sqrt{b^2-4c}}$$

Pour $(b, c) = f(x, y) = (x+y, xy)$, de sorte que $\sqrt{b^2-4c} = y-x$, cela donne

$$\frac{\partial (f^{-1})_1}{\partial x}(f(x, y)) = \frac{1}{2} - \frac{x+y}{2(y-x)} = \frac{1}{2} \left(\frac{y-x-x-y}{y-x} \right) = \frac{x}{x-y}$$

$$\frac{\partial (f^{-1})_1}{\partial y}(f(x, y)) = \frac{1}{y-x} = -\frac{\partial (f^{-1})_2}{\partial y}(f(x, y))$$

$$\text{et } \frac{\partial (f^{-1})_2}{\partial x}(f(x, y)) = \frac{1}{2} + \frac{x+y}{2(y-x)} = \frac{1}{2} \left(\frac{y-x+x+y}{y-x} \right) = \frac{y}{y-x}$$

$$\text{Finalement } \text{Jac}(f^{-1})_{f(x, y)} \cdot \text{Jac}(f)_{(x, y)} = \frac{1}{x-y} \begin{pmatrix} x & -1 \\ -y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{x-y} \begin{pmatrix} x-y & 0 \\ 0 & -y+x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } I!$$

(et même chose avec $\text{Jac}(f^{-1})_{f(b, c)} \text{Jac}(f)_{(b, c)}$)

2) f est C^1 sur $\mathbb{R}^3$ car chaque composante est C^1 par composition.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = (a, b, c) \Leftrightarrow \begin{cases} e^{2y} + e^{2z} = a \\ e^{2x} - e^{2z} = b \\ x - y = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + c \\ e^{2y} + e^{2z} = a \\ e^{2x} + e^{2y} = a + b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} u = y + c \\ e^{2u} (e^{2c} + 1) = a + b \\ e^{2y} = a - e^{2u} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y + c \\ \frac{a+b}{1+e^{2c}} > 0 \text{ et } y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{a+b}{1+e^{2c}} \right) \\ \frac{a - \frac{a+b}{1+e^{2c}}}{1+e^{2c}} > 0 \text{ et } z = \frac{1}{2} \ln \left(a - \frac{a+b}{1+e^{2c}} \right) \end{array} \right. \\ \text{"} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} a+b > 0 \\ ae^{1c}-b > 0 \end{matrix} \quad \text{et} \quad (x, y, z) = \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{a+b}{1+e^{1c}} \right) + c, \frac{1}{2} \ln \left(\frac{a+b}{1+e^{1c}} \right), \frac{1}{2} \ln \left(\frac{ae^{1c}-b}{1+e^{1c}} \right) \right)$$

Cela nous donne $f(\mathbb{R}^3) = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid -a < b < ae^{2c} \right\}$

Ce qui précède montre que f est injective sur $\mathbb{R}^2$, surjective sur $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} f(\mathbb{R}^2)$ (tautologique).

Pour montrer qu'elle définit un C^1 difféo, il suffit de calculer sa jacobienne en (t, p) (ex. 4.3) de $\mathbb{R}^3$ et montrer qu'elle est inversible $\swarrow$ par le thm d'inversion locale

$$\text{jac } f(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} 0 & 2e^{\frac{2y}{z}} & 2e^{\frac{2y}{z}} \\ 2e^{\frac{2x}{z}} & 0 & -2e^{\frac{2x}{z}} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2e^{\frac{2y}{z}} & 2e^{\frac{2y}{z}} \\ 0 & -2e^{\frac{2x}{z}} \end{vmatrix} - 2e^{\frac{2x}{z}} \begin{vmatrix} 2e^{\frac{2y}{z}} & 2e^{\frac{2x}{z}} \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ = -4e^{\frac{2(y+z)}{z}} - 4e^{\frac{2(x+z)}{z}} = -4 \left(\underbrace{e^{\frac{2(y+z)}{z}} + e^{\frac{2(x+z)}{z}}}_{>0} \right) \neq 0 \quad \square$$

Exercice 13 (a) ϕ et C^1 car chaque composante l'est, par composition.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\}), \exists! (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\text{ tq } (x,y) = (r \cos \theta, r \sin \theta) : \\ \text{ (ie } x+iy = r e^{i\theta} \text{)}$$

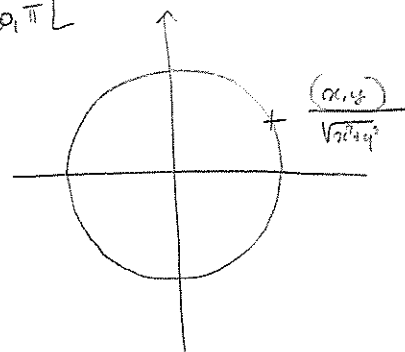
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \theta = \text{l'unique détermination de l'argument de } x+iy \\ \text{appartenant à }]-\pi, \pi[\text{ (soit car } (x,y) \notin \mathbb{R} \times \{0\})$$

ϕ est bijective et

$$\text{Ainsi, } \boxed{\phi^{-1}} : \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\}) \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\text{ est l'application } \boxed{(x,y) \mapsto (\sqrt{x^2+y^2}, \text{Arg}(x+iy))}$$

Si l'on veut écrire la 2^e composante interne des fonctions usuelles, il faut faire attention. Si $y \geq 0$, $\text{Arg}(x+iy) = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \in [0, \pi[$

$$\text{Si } y < 0, \quad \underline{\underline{\text{Arg}(x+iy) = -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \in]-\pi, 0]}}$$



Encore une fois, pour montrer que ϕ est un C^1 difféo, il suffit de montrer que son jacobien ne s'annule pas.

$$\underline{\text{jac } \phi}_{(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \underline{r > 0}. \quad \square$$

$$(b) \text{ Remarquons que } \Psi = \phi \circ f \text{ où } f : \mathbb{R} \times]-\pi, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\\ \text{(exp, id)} \quad (u, v) \longmapsto (e^u, v)$$

exp est un C^1 difféo de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, d'inverse $\ln$, donc f est un C^1 difféo de U dans V , d'inverse $(\ln, \text{id})$. Ψ est donc un C^1 difféo comme composée de C^1 difféos, et $\Psi^{-1} = f^{-1} \circ \phi^{-1}$ ie

$$\boxed{\Psi^{-1}(x,y)} = f^{-1}\left(\sqrt{x^2+y^2}, \text{Arg}(x+iy)\right) = \boxed{\left(-\ln \sqrt{x^2+y^2}, \text{Arg}(x+iy)\right)}.$$

Exercice 14

1. L'application $t \mapsto e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ où elle est donc localement intégrable. De plus, pour tout nombre réel $A > 0$, on a :

$$\int_0^A e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^A = 1 - e^{-A}.$$

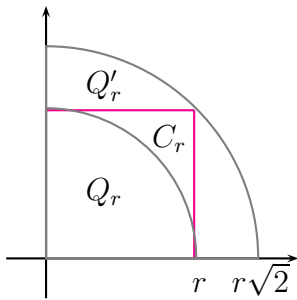
Comme e^{-A} admet une limite (nulle) lorsque A tend vers $+\infty$, il s'ensuit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ est convergente (et vaut 1).

L'application $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ où elle est donc localement intégrable. Compte tenu de la croissance de la fonction exponentielle, pour tout nombre réel $t \geq 1$, on a l'encadrement :

$$0 \leq e^{-t^2} \leq e^{-t},$$

de sorte que, d'après le critère de comparaison des intégrales des fonctions positives, la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ entraîne celle de $\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et donc celle de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

2. a.



- b. De la double inclusion $Q_r \subset C_r \subset Q'_r$ et de la positivité de l'application f , on déduit la double inégalité demandée.

c. Pour tous nombres réels strictement positifs a et r , on note

$$Q(a, r) = \{(x, y) \in E; x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq ar^2\}.$$

Calculons $\int \int_{Q(a, r)} f(x, y) dx dy$ (ces intégrales existent puisqu'on intègre une application de continue sur un domaine borné). On passe en coordonnées polaires : $x = \rho \cos \theta$, et $y = \rho \sin \theta$.

$$\int \int_{Q(a, r)} f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{r\sqrt{a}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\theta d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{r\sqrt{a}} e^{-\rho^2} \rho d\theta d\rho$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{r\sqrt{a}} e^{-\rho^2} \rho d\rho = \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right]_0^{r\sqrt{a}} = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-ar^2}).$$

Comme $Q(1, r) = Q_r$ et $Q(2, r) = Q'_r$, il s'ensuit que $J_r = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-r^2})$ et $J'_r = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2r^2})$.

d. Comme $I_r = \int \int_{C_r} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = \int_0^r e^{-x^2} dx \int_0^r e^{-y^2} dy = \left(\int_0^r e^{-x^2} dx \right)^2$, la double inégalité $J_r \leq I_r \leq J'_r$ se traduit par

$$\frac{\pi}{4} (1 - e^{-r^2}) \leq \left(\int_0^r e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2r^2}).$$

e. Comme $\frac{\pi}{4} (1 - e^{-r^2})$ et $\frac{\pi}{4} (1 - e^{-2r^2})$ tendent vers la même limite $\frac{\pi}{4}$ lorsque r tend vers $+\infty$, on déduit de l'encadrement précédent que $\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \frac{\pi}{4}$, c'est-à-dire que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ puisque cette dernière intégrale est positive (on intègre de 0 à $+\infty$ une fonction positive).