Feuille 1 : Équations différentielles linéaires

Correction des II.2 et II.3

2.a. Sur son ensemble de définition,

$$w' = \cancel{y_1'y_2'} + y_1y_2'' - \cancel{y_2'y_1'} - y_2y_1'' = y_1(-\tfrac{b}{a}y_2' - \tfrac{c}{a}y_2) - y_2(-\tfrac{b}{a}y_1' - \tfrac{c}{a}y_1) = -\tfrac{b}{a}w,$$

donc w est bien solution d'une EDLH d'ordre 1 (à coefficient constant).

2.b. Si $\chi(X)$ a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, y_i est la fonction $t \mapsto e^{r_it}$, donc

$$w(0) = (y_1y_2' - y_2y_1')(0) = 1 \times r_2 - 1 \times r_1 \neq 0.$$

Si $\chi(X)$ a une racine réelle simple r, $y_1 = t \mapsto e^{rt}$ et $y_2 = t \mapsto te^{rt}$, de dérivée $t \mapsto (1+rt)e^{rt}$, donc

$$w(0) = (y_1y_2' - y_2y_1')(0) = 1 \times 1 - 0 \times r \neq 0.$$

Enfin si $\chi(X)$ a des racines complexes (non réelles) conjuguées $\alpha \pm i\beta$, $y_1 = t \mapsto e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ et $y_2 = t \mapsto e^{\alpha t}\sin(\beta t)$, de dérivées respectives $t \mapsto e^{\alpha t}(\alpha\cos(\beta t) - \beta\sin(\beta t))$ et $t \mapsto e^{\alpha t}(\alpha\sin(\beta t) + \beta\cos(\beta t))$, donc

$$w(0) = (y_1y_2' - y_2y_1')(0) = 1 \times \beta - 0 \times \alpha \neq 0.$$

On a bien dans tous les cas $w(0) \neq 0$. Or d'après la question précédente, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $w(t) = w(0)e^{-\frac{b}{a}t}$, et l'exponentielle ne s'annule pas, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $w(t) \neq 0$.

ATTENTION ! Le simple fait que y_1 et y_2 soient des éléments linéairement indépendants de $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ne signifie pas et n'entraîne pas que les vecteurs $\binom{y_1(t)}{y_1'(t)}$ et $\binom{y_2(t)}{y_2'(t)}$ sont linéairement indépendants pour tout t ! Il y a des tas de fonctions linéairement indépendantes dont le DL à l'ordre 1 coincide en un ou plusieurs point(s) ! Donc on ne peut pas montrer comme cela que $w(t) \neq 0$ pour tout t. Il faut utiliser le fait que y_1 et y_2 sont solution d'une même EDL !!

2.c. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Y'(t) = \binom{y'(t)}{y''(t)}$ et

$$AY(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ -\frac{c}{a}y(t) - \frac{b}{a}y'(t) \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} \Big(\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y'(t) = AY(t)\Big) &\Leftrightarrow \Big(\forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) = -\tfrac{c}{a}y(t) - \tfrac{b}{a}y'(t)\Big) \\ &\Leftrightarrow y \text{ est solution de } (EH). \end{aligned}$$

2.d. Pour $i = 1, 2$, y_i est solution de (EH) donc d'après la question précédente, en notant $Y_i = \binom{y_i}{y_i'}$, $Y_i' = AY_i$, et donc $R' = AR$. En outre, $\det(R) = w$, qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $R(t)$ est inversible.

2.e. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(R(t))^{-1} = \frac{1}{w(t)} \begin{pmatrix} y_2'(t) & -y_2(t) \\ -y_1'(t) & y_1(t) \end{pmatrix}$$

donc les coefficients de $C = R^{-1}Y$ sont dérivables comme sommes de produits de fonctions dérivables. On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Y'(t) = R'(t)C(t) + R(t)C'(t)$ (on peut justifier cette formule en écrivant que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et tout $t \neq t_0$,

$$\begin{aligned}\frac{Y(t)-Y(t_0)}{t-t_0} &= \frac{R(t)C(t)-R(t)C(t_0)+R(t)C(t_0)-R(t_0)C(t_0)}{t-t_0}\\ &= R(t)\frac{C(t)-C(t_0)}{t-t_0} + \frac{R(t)-R(t_0)}{t-t_0}C(t_0)\\ &\xrightarrow[t\to t_0]{} R(t_0)C'(t_0) + R'(t_0)C(t_0),\end{aligned}$$

par continuité du produit matriciel ou de façon plus élémentaire par convergence coordonnée par coordonnée), donc $Y'(t) = AR(t)C(t) + R(t)C'(t) = AY(t) + R(t)C'(t)$. Donc y est solution de (EH) si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $R(t)C'(t) = \binom{0}{0}$, ce qui équivaut à $C'(t) = \binom{0}{0}$ car $R(t)$ est inversible. Finalement, on a bien que y est solution de (EH) si et seulement si C est une fonction constante.

2.f. Ainsi, y est solution de (EH) si et seulement si il existe $C = \binom{c_1}{c_2} \in \mathbb{R}^2$ tel que $\binom{y}{y'} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} C$, i.e. tel que $y = c_1y_1 + c_2y_2$ et $y' = c_1y_1' + c_2y_2'$ (cette deuxième condition étant redondante car découlant de la première). L'ensemble des solutions de (EH) est donc bien l'ensemble des fonctions de la forme $c_1y_1 + c_2y_2$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, (y_1, y_2) en formant une famille libre et génératrice, donc une base. Les différents cas de figure selon le discriminant du polynôme caractéristique ont été donnés dans la question 1.f.

2.g. Soit y une solution, donc de la forme $c_1y_1 + c_2y_2$.

$$\begin{aligned}\binom{y(t_0)}{y'(t_0)} = \binom{y_0}{y_0'} &\Leftrightarrow \binom{c_1y_1(t_0)+c_2y_2(t_0)}{c_1y_1'(t_0)+c_2y_2'(t_0)} = \binom{y_0}{y_0'}\\ &\Leftrightarrow R(t_0)\binom{c_1}{c_2} = \binom{y_0}{y_0'}\\ &\Leftrightarrow \binom{c_1}{c_2} = (R(t_0))^{-1}\binom{y_0}{y_0'}.\end{aligned}$$

Donc il existe bien une unique $y \in \mathrm{Sol}(EH)$ tel que $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_0'$.

2.h. Le polynôme caractéristique de cette EDL d'ordre 2 homogène à coefficients constants est $X^2 + \omega^2$, qui a deux racines imaginaires pures $\pm i\omega$ si $\omega \neq 0$, et une racine réelle double 0 sinon. L'ensemble des solutions de l'équation est donc dans le premier cas

$$\{f : x \in \mathbb{R} \mapsto c_1\cos(\omega x) + c_2\sin(\omega x),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

et dans le second cas

$$\{f : x \in \mathbb{R} \mapsto c_1 + c_2t,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\},$$

c'est-à-dire l'ensemble des fonctions affines.

3.a. On montre comme en $I.B.1$ que $\mathrm{Sol}(E) = p + \mathrm{Sol}(EH)$.

3.b. Plus précisément, montrons que si d est une fonction polynomiale $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_kx^k$ de degré n, (E) admet une solution polynomiale de degré n. Soit $Q : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} b_kx^k$ une fonction polynomiale de degré n. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$Q'(x) = \sum_{k=1}^{n} kb_kx^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1}(j+1)b_{j+1}x^j$$

et de la même façon

$$Q''(x) = \sum_{l=0}^{n} (l+2)(l+1)b_{l+2}x^l,$$

donc

$$\begin{aligned} aQ''(x) &+ bQ'(x) + cQ(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \left(a(k+2)(k+1)b_{k+2} + b(k+1)b_{k+1} + cb_k\right) x^k + (bnb_n + cb_{n-1})x^{n-1} + cb_n x^n. \end{aligned}$$

Donc par identification, Q est solution si et seulement si

$$\begin{cases} a_n & = & cb_n \\ a_{n-1} & = & bnb_n + cb_{n-1} \\ \forall k \in [\![0, n-2]\!], a_k & = & a(k+2)(k+1)b_{k+2} + b(k+1)b_{k+1} + cb_k \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} a_n \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n \\ \vdots \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

Comme $c \neq 0$, la matrice est inversible, donc le système a une unique solution, ce qui conclut.

Supposons maintenant que d est de la forme $x \mapsto e^{\lambda x}P(x)$ avec P polynomiale de degré n. Soit $Q : x \mapsto \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ une fonction polynomiale et $f : x \mapsto e^{\lambda x}Q(x)$. Après calcul, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(af'' + bf' + cf)(x) = e^{\lambda x}\left(cQ'' + (2\lambda c + b)Q' + (a\lambda^2 + b\lambda + c)Q\right)(x).$$

Ainsi, f est solution ssi Q est solution de

$$(*) \quad cy'' + (2\lambda c + b)y' + (a\lambda^2 + b\lambda + c)y = P,$$

équation du type étudié précédemment (à condition que $a\lambda^2 + b\lambda + c \neq 0$, c'est-à-dire que λ ne soit pas racine du polynôme caractéristique), et qui admet une solution polynomiale de degré n, donc l'équation initiale admet bien une solution de la forme $x \mapsto e^{\lambda x}Q(x)$ avec Q du même degré que P. Si λ est racine simple du polynôme caractéristique, on montre de la même manière que $(*)$ admet une infinité de solutions polynomiales de degré $n+1$, et exactement une valant 0 en 0. Enfin si λ est racine double du polynôme caractéristique, on montre que $(*)$ admet une infinité de solutions polynomiales de degré $n+2$, et exactement une ayant 0 pour racine double.

Finalement, l'équation initiale admet exactement une solution de la forme $x \mapsto x^k R(x)e^{\lambda x}$ où k est la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique et R est polynomiale de degré n.

Application. On commence par résoudre l'équation homogène. Son polynôme caractéristique est $X^2 - 3X + 2$ qui a deux racines réelles distinctes 1 et 2, donc l'ensemble de ses solutions est

$$\left\{f : x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$

D'après ce qui précède, 1 étant racine simple du polynôme caractéristique et $x \mapsto x+1$ polynomiale de degré 1, l'équation globale a une solution particulière de la forme $f : x \mapsto \alpha(\alpha x^2 + \beta x)e^x$. Après calculs,

$$\begin{aligned}(f'' - 3f' + 2f)(x) &= (((4\alpha + \beta) - 3(2\alpha + \beta) + 2\beta)x + (2\alpha + 2\beta) - 3\beta)e^x \\ &= (-2\alpha - 2\beta)x + 2\alpha - \beta\end{aligned}$$

donc comme f est solution,

$$-2\alpha - 2\beta = 1 \quad \text{et} \quad 2\alpha - \beta = 1$$

ce qui donne

$$\beta = -\tfrac{2}{3} \quad \text{et} \quad \alpha = \tfrac{1}{6}.$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation étudiée est

$$\left\{ g : x \in \mathbb{R} \mapsto (\tfrac{1}{6}x^2 - \tfrac{2}{3}x + \lambda)e^x + \mu e^{2x},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

3.c. Étant données des fonctions c_1, c_2 sur I,

$$\begin{cases} c_1y_1 + c_2y_2 &= y \\ c_1y_1' + c_2y_2' &= y' \end{cases} \Leftrightarrow R\binom{c_1}{c_2} = \binom{y}{y'} \Leftrightarrow \binom{c_1}{c_2} = R^{-1}\binom{y}{y'}.$$

Or les composantes de $R^{-1}\binom{y}{y'}$ sont C^1 (déjà vu ou presque), donc il existe bien un unique couple (c_1, c_2) de fonctions C^1 telles que $\begin{cases} c_1y_1 + c_2y_2 &= y \\ c_1y_1' + c_2y_2' &= y' \end{cases}$.

3.d. La réponse à cette question est quasi-identique à celle de 2.e.

3.e. On commence par résoudre l'équation homogène. Son polynôme caractéristique est $X^2 + 1$ qui a deux racines imaginaires pures $\pm i$, donc l'ensemble de ses solutions est

$$\{ f : x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation complète sous la forme $f = c_1 \cos + c_2 \sin$ avec c_1 et c_2 de classe C^1 sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. D'après ce qui précède, f est solution ssi

$$C' = \begin{pmatrix} \cos & \sin \\ -\sin & \cos \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos & -\sin \\ \sin & \cos \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tan \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$C : x \mapsto \binom{-\ln(\cos)}{x}$ satisfait cette égalité, donc $f : x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\mapsto -\cos x \ln(\cos x) + x \sin x$ est une solution particulière de l'équation, et l'ensemble de toutes les solutions est

$$\left\{ g : x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\mapsto (\lambda - \ln(\cos x))\cos(x) + (\mu + x)\sin(x),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$