Feuille 3 : Séries entières

Exercice 1. Déterminer les rayons de convergence des séries entières de terme général :

$$(a)\quad nz^n\ ,\quad (b)\quad n!z^n\ ,\quad (c)\quad \frac{z^n}{n!}\ ,\quad (d)\quad \frac{n^n}{n!}z^n\ ,\quad (e)\quad 2^{-n}(1+\tfrac{1}{n})^{n^2}z^n$$

$$(f)\quad 2^n z^{2n},\quad \text{c'est à dire la série entière } \sum a_n z^n \text{ avec } a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 2^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

$$(g)\quad a_n z^n \text{ avec } a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 2^n & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :

$$\text{(a)} \sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)} \quad , \quad \text{(b)} \sum_{n\geq 0} n(n+1)x^n \quad , \quad \text{(c)} \sum_{n\geq 0} \frac{3n}{n+2}x^n \quad , \quad \text{(d)} \sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n-1}{n!}x^n.$$

Exercice 3.

Partie I

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs telle que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ admette un rayon de convergence R strictement positif. On note :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Montrer que $f(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers R par valeurs inférieures si et seulement si f est majorée sur $[0, R[$.

On suppose dans la suite de cette partie que l'une de ces conditions équivalentes est satisfaite et on note L la limite.

2.a. Montrer que pour tout n entier naturel :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k R^k \leq L.$$

2.b. En déduire que la série de terme général $a_n R^n$ est convergente.

2.c. Montrer que la série entière est normalement convergente sur $[-R, R]$. En déduire que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n = \lim_{x\to R^-} f(x).$$

Partie II

Soit (E) l'équation différentielle :

$$4x^2y''(x) + 4xy'(x) - y = \frac{x}{1-x}.$$

3. On note $I =]0,1[$. Quelle est la structure de l'ensemble des solutions de (E) sur I ?

4. Développer en série entière autour de l'origine les fonctions $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et $x \mapsto \frac{1}{1+x}$. Préciser les domaines de convergence des séries obtenues.
5. Trouver une solution développable en série entière autour de l'origine de (E). Déterminer le rayon de convergence de la série obtenue.

6. Soit $\varphi : x \in I \mapsto \varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{4n^2-1}$.

6.a. Déterminer les constantes α et β telles que :

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{4n^2-1} = \frac{\alpha}{2n-1} + \frac{\beta}{2n+1}.$$

6.b. Soient pour $x \in I$ et $u \in I$, $H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$ et $h(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n+1}}{2n+1}$. Montrer que

$$h(u) = \ln \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}.$$

6.c. En déduire une expression simple de $H(x)$. On pourra poser $u = \sqrt{x}$.

6.d. En déduire une expression de $\varphi(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

6.e. Calculer la valeur de $L = \lim_{x \to 1^-} \varphi(x)$.

6.f. En déduire, grâce au résultat de la partie I, la valeur de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

7. On se propose dans cette question de retrouver la valeur de S directement. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1}$. Prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Conclure.