

Feuille 4 : Topologie dans $\mathbb{R}^n$

Exercice 1. Convergence de suites dans $\mathbb{R}^2$. Représenter les suites suivantes dans $\mathbb{R}^2$. Lesquelles sont convergentes ?

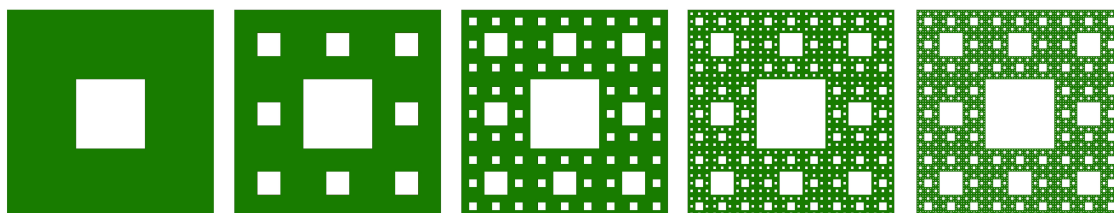
$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{n}, 1\right) \quad (e^{-n}, e^{-n}) \quad (1/n^2, 1/n) \quad (e^n, e^{-n}) \\ & (2n, -5n) \quad (n \cos(n\pi/4), n \sin(n\pi/4)) \quad \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}, \sin(n\frac{\pi}{2})\right). \end{aligned}$$

Exercice 2. Normes équivalentes et topologie. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$. Soit U un ensemble ouvert pour cette norme. Justifier qu'il est également ouvert pour la norme $\|\cdot\|_1$. Faire un dessin. Même question avec un fermé, puis un compact.

Exercice 3. Exemples. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont ouverts, fermés, compacts ?

1. Le singleton $\{v\}$, où v est un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Et dans $\mathbb{R}^n$?
2. L'ensemble $\{v_1, \dots, v_k\}$, où les v_j sont des vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Et dans $\mathbb{R}^n$?
3. La boule unité $B_N(0, 1)$ ouverte, où N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Même question avec la boule unité fermée.
4. L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq x^2\}$.
5. L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < y < x^2\}$.
6. L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -2 < y \leq x^2\}$.
7. L'ensemble de points $\{1/2^n, n \in \mathbb{N}\}$ dans $\mathbb{R}$.
8. L'ensemble de points $\{2^n, n \in \mathbb{N}\}$ dans $\mathbb{R}$.
9. Les rationnels $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Le tapis de Sierpinski. On considère le carré fermé $[0, 1]^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On lui retire le carré ouvert $]1/3, 2/3[^2$, puis pour chaque carrés restant, on lui retire le carré ouvert central et on continue à itérer l'opération à l'infini. On obtient un tapis de Sierpinski qui est un ensemble fractal. Cet ensemble est-il ouvert ? Fermé ? Compact ?



Exercice 5. Un sous-ensemble complexe. On considère l'ensemble

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x + y| \leq 2, |x - y| > 1 \text{ et } ||y| - 3| \leq 1\}.$$

Représenter cet ensemble et dire s'il est ouvert ou fermé.

Exercice 6. Vrai/faux. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses

1. Si $(u_n) \subset \mathbb{R}^2$ est une suite non bornée, alors $\|u_n\| \rightarrow +\infty$ pour toute norme de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $(x_n, y_n) \subset \mathbb{R}^2$ telle que $\|(x_n, y_n)\| \rightarrow +\infty$ alors $|x_n| \rightarrow +\infty$ ou $|y_n| \rightarrow +\infty$.
3. Si un ensemble n'est pas ouvert, alors il est fermé.
4. Un ensemble peut être ouvert et fermé en même temps.
5. Le complémentaire d'un ouvert est un fermé.
6. L'intersection quelconque d'ouverts est un ouvert.
7. L'intersection quelconque de fermés est un fermé.
8. Une union finie de compacts est un compact.
9. Un ouvert de $\mathbb{R}$ contient forcément un intervalle fermé $[a, b]$ avec $b > a$.
10. Si F et F' sont deux fermés de $\mathbb{R}^2$, la somme

$$F + F' = \{v \in \mathbb{R}^2, \quad v = f + f' \text{ avec } f \in F, \quad f' \in F'\}$$

est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7. Continuité. Peut-on prolonger par continuité en 0 les fonctions définies de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ par les formules suivantes.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{xy}{|x| + |y|} & f(x, y) &= \frac{xy}{x^2 + y^2} & f(x, y) &= \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \\ f(x, y) &= \frac{1 + x^2 + y^2}{y} \sin(y) & f(x, y) &= \frac{x^2}{|y| + x^2} & f(x, y) &= \frac{\sin x + \sin y}{|x| + |y|} . \end{aligned}$$

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f est *coercive*, c'est-à-dire que $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$.

1. Montrer qu'un ensemble de niveau $N_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^2, f(x) = \lambda\}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$. Est-ce forcément une "ligne" de niveau ?
2. Montrer qu'un ensemble de sous-niveau $S_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^2, f(x) \leq \lambda\}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$.
3. En déduire que f est minorée et atteint son minimum.

Exercice 9. Vrai/Faux Soit f une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. L'image d'un fermé de $\mathbb{R}^n$ par f est fermé.
2. L'image réciproque d'un ouvert de $\mathbb{R}^m$ par f est ouverte.
3. L'image réciproque d'une boule ouverte de $\mathbb{R}^m$ est une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$.
4. L'image réciproque d'un compact de $\mathbb{R}^m$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.
5. L'image d'un compact de $\mathbb{R}^n$ est un compact de $\mathbb{R}^m$.
6. Soit B une partie bornée de $\mathbb{R}^n$ et $f : B \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction continue sur B . Alors $f(B)$ est bornée.