Feuille 4 : Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$

Dérivées partielles, régularité

Exercice 1. Déterminer et représenter dans $\mathbb{R}^2$ le domaine de définition des fonctions suivantes, puis calculer leurs dérivées partielles (premières) lorsqu'elles existent.

$$f(x,y) = x^3 + x^2\sin(xy), \qquad f(x,y) = x^4e^y, \qquad f(x,y) = \ln(1 - \|(x,y)\|_2^2),$$
$$f(x,y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right), \quad f(x,y) = \sqrt{x-y^2}, \quad f(x,y) = \ln(\sin(x-y)).$$

Exercice 2. Calculer la matrice jacobienne en tout point des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définies par :

$$f(x,y) = (ax+by, cx+dy), \quad \text{où } (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, \quad \text{et} \quad f(x,y) = (\,\sin(xy)\,,\, xe^{-(x^2+y^2)}\,)\ .$$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions C^1. Redémontrer que la fonction $t \mapsto f(u(t), v(t))$ est C^1 sur $\mathbb{R}$. On exprimera sa dérivée.

Exercice 4. Soit f la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(0,0) = 0$ et pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$.

1. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. (a) Montrer que f est C^1 sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   (b) Donner la matrice jacobienne de f en tout point $(x,y) \in U$.
   (c) La fonction f admet-elle à l'origine des dérivées partielles d'ordre 1 ?
   (d) La fonction f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x,0) = 0$ et $f(x,y) = y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right)$ pour tout $y \neq 0$.

1. Etudier la continuité de f.
2. Etudier l'existence et la valeur de dérivées partielles d'ordre 1 et 2. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent en $(0,0)$ mais n'ont pas la même valeur. Quelle est la classe de f ?

Points critiques, extrema

Exercice 6. Trouver les points critiques des fonctions suivantes, et discuter leur nature :

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + x^3\ , \quad f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy\ , \quad f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$$
$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy\ , \quad f(x,y) = xe^y + ye^x.$$

Exercice 7. Parmi tous les triangles rectangles dont la somme des longueurs des côtés de l'angle droit est un nombre donné s, déterminer ceux dont l'aire est maximale.

Exercice 8. Soient p_1, p_2 et p_3 trois points du plan euclidien E. Déterminer le point $a \in E$ tel que la somme des carrés des distances de ce point aux points p_1, p_2 et p_3 soit minimale.

Exercice 9. Parmi tous les parallélépipèdes rectangles de volume donné V, quels sont ceux dont l'aire est minimale ?

Exercice 10. Pour $x > 0$, on pose $g(x) = \ln(x) + 2x + 1$.

1. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $a \in]0, \frac{1}{e}[$.
2. Sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on pose $f(x,y) = x(\ln(x)+x+y^2)$. Déterminer l'unique point critique de f.
3. Vérifier que f admet un minimum local en ce point et l'exprimer en fonction de a.

Exercice 11. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$.

1. Prouver que pour tout $k \in \mathbb{R}$, la fonction $g_k(x)$ définie par $g_k(x) = f(x, kx)$ admet un minimum local en 0.
2. La fonction f admet-elle un minimum local en $(0,0)$?

Changements de variables

Exercice 12. Coordonnées polaires. Montrer que l'application suivante est un C^1-difféomorphisme.

$$\begin{array}{rccl} \phi & : & \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_- \times \{0\} \\ & & (r,\theta) & \mapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

Exercice 13. Intégrales multiples.

1. Prouver la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ et en déduire celle de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.
2. Le plan euclidien est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; r est un réel strictement positif. On pose :

$$\begin{aligned} C_r &= \{(x,y) \in E; 0 \leq x \leq r \text{ et } 0 \leq y \leq r\}, \\ Q_r &= \{(x,y) \in E; x \leq 0,\ y \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leq r^2\}, \\ Q'_r &= \{(x,y) \in E; x \leq 0,\ y \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 2r^2\}. \end{aligned}$$

   (a) Représenter dans un même repère C_r, Q_r et Q'_r.

   On pose, pour x et y réels, $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$, et

$$I_r = \iint_{C_r} f(x,y)dxdy, \quad J_r = \iint_{Q_r} f(x,y)dxdy, \quad J'_r \iint_{Q'_r} f(x,y)dxdy.$$

   (b) Justifier la double inégalité : $J_r \leq I_r \leq J'_r$.

   (c) Calculer J_r et J'_r.

   (d) En déduire que $\frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-r^2}\right) \leq \left(\int_0^r e^{-x^2}dx\right)^2 \leq \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-r^2}\right)$.

   (e) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

Exercice 14. Laplacien en coordonnées polaires. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2. On pose

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2} \quad (\textit{Laplacien} \text{ de } f).$$

On pose, pour tout $(\rho,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $g(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$.

1. Calculer $\frac{\partial g}{\partial \rho}$, $\frac{\partial g}{\partial \theta}$, $\frac{\partial^2 g}{(\partial \rho)^2}$ et $\frac{\partial^2 g}{(\partial \theta)^2}$ en fonction des dérivées partielles de f.
2. Exprimer Δf en fonction des dérivées de g.