Feuille 2 : Équations différentielles (suite)

Correction

Exercice 1. Les deux équations à étudier sont linéaires du premier ordre à coefficients variables. On commence donc par résoudre l'équation homogène associée, puis on détermine une solution particulière de l'équation complète grâce à la méthode de la variation de la constante (ou pas), et on déduit enfin l'ensemble de toutes les solutions de l'équation initiale.

1. L'équation (E_1) est de la forme $y' = a(x)y + b(x)$ avec a définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $a(x) = \tan(x)$ et $b : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x)$. Les solutions maximales seront donc définies sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

La fonction $\tan = \frac{\sin}{\cos} = \frac{-\cos'}{\cos}$ admet pour primitive $-\ln|\cos| = -\ln(\cos) = \ln(\frac{1}{\cos})$ sur I. L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée (EH_1) est donc

$$\left\{f : x \in I \mapsto C\exp\left(\ln\left(\tfrac{1}{\cos(x)}\right)\right) = \tfrac{C}{\cos(x)},\ C \in \mathbb{R}\right\}.$$

On cherche une solution particulière de (E_1) sous la forme $f : x \in I \mapsto \frac{C(x)}{\cos(x)}$ avec $C : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1. f est solution de (E_1) si et seulement si

$$\begin{aligned}
\forall x \in I,\ f'(x) = \tan(x)f(x) - \cos^2(x) &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ \tfrac{C'(x)}{\cos(x)} + C(x)\tfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)} = \tan(x)\tfrac{C(x)}{\cos(x)} - \cos^2(x) \\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ \tfrac{C'(x)}{\cos(x)} = -\cos^2(x) \\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ C'(x) = -\cos^3(x).
\end{aligned}$$

Pour déterminer une primitive de $-\cos^3$, on "linéarise" :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ -(\cos(x))^3 &= -\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 \\
&= -\tfrac{1}{8}\left(e^{i3x} + 3e^{i2x}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-i2x} + e^{-i3x}\right) \\
&= -\tfrac{1}{8}\left(2\cos(3x) + 6\cos(x)\right) \\
&= -\tfrac{1}{4}\left(\cos(3x) + 3\cos(x)\right).
\end{aligned}$$

Donc $-\cos^3$ admet pour primitive $x \mapsto -\frac{1}{4}\left(\frac{\sin(3x)}{3} + 3\sin(x)\right)$, et $(E1)$ admet donc pour solution particulière :

$$f : x \in I \mapsto -\frac{\frac{\sin(3x)}{3} + 3\sin(x)}{4\cos(x)}.$$

L'ensemble des solutions maximales de (E_1) est donc l'ensemble des fonctions de la forme

$$g : x \in I \mapsto -\frac{\frac{\sin(3x)}{3} + 3\sin(x)}{4\cos(x)} + \tfrac{C}{\cos(x)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 \neq 0$ donc l'équation (E_2) peut être mise sous la forme $y' = a(x)y + b(x)$ avec $a : x \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{1}{1+x^2}$ et $b : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Les solutions maximales seront donc définies sur $\mathbb{R}$.

La fonction a admet pour primitive $-\arctan$ sur $\mathbb{R}$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée (EH_2) est donc

$$\{f : x \in \mathbb{R} \mapsto C\exp(-\arctan(x)),\ C \in \mathbb{R}\}.$$

On peut remarquer (ou pas...) que la fonction constante égale à 1 est solution de (E_2). L'ensemble des solutions maximales de (E_2) est donc l'ensemble des fonctions de la forme

$$g : x \in \mathbb{R} \mapsto 1 + Ce^{-\arctan(x)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2. 1. À nouveau, l'équation à étudier est linéaire du premier ordre à coefficients variables. Si l'on se restreint à $\mathbb{R}_+^*$, elle peut être mise sous la forme $y' = a(x)y + b(x)$ avec $a : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto -\frac{2}{x}$ et $b : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Les solutions maximales *dans ce cas restreint* seront définies sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction a admet pour primitive $x \mapsto -2\ln(x) = \ln(\frac{1}{x^2})$ sur $\mathbb{R}_+^*$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée (EH) est donc

$$\left\{f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto C\exp\left(\ln\left(\tfrac{1}{x^2}\right)\right) = \tfrac{C}{x^2},\ C \in \mathbb{R}\right\}.$$

On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{C(x)}{x^2}$ avec $C : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe C^1. f est solution de (E) si et seulement si

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = -2\tfrac{f(x)}{x} + \tfrac{1}{1+x^2} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \tfrac{C'(x)}{x^2} - \tfrac{2C(x)}{x^3} = -2\tfrac{C(x)}{x^3} + \tfrac{1}{1+x^2} \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \tfrac{C'(x)}{x^2} = \tfrac{1}{1+x^2} \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ C'(x) = \tfrac{x^2}{1+x^2} = 1 - \tfrac{1}{1+x^2} \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ C(x) = x - \arctan(x) + \lambda.
\end{aligned}$$

Ainsi, (E) admet pour solution particulière $x \mapsto \frac{x-\arctan(x)}{x^2}$. L'ensemble des solutions maximales de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est donc l'ensemble des fonctions de la forme

$$g_C : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{x - \arctan(x) + C}{x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

De la même façon, les solutions maximales de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions de la forme

$$h_{C'} : x \in \mathbb{R}_-^* \mapsto \frac{x - \arctan(x) + C'}{x^2}, \quad C' \in \mathbb{R}.$$

Au voisinage de 0^+, $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ donc $g_C(x) = \frac{x}{3} + o(x) + \frac{C}{x^2}$, qui est prolongeable par continuité en 0 si et seulement si $C = 0$. Il en est de même pour $h_{C'}$. La seule éventuelle solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$ tout entier coincide donc avec g_0 sur $\mathbb{R}_+^*$, avec h_0 sur $\mathbb{R}_-^*$ et vaut 0 en 0 puisque c'est la limite de g_0 et h_0 en 0^+ et 0^- respectivement. La fonction ainsi définie admet bien un développement limité à l'ordre 1 en 0, donc elle y est dérivable (ailleurs on le savait déjà), de dérivée $\frac{1}{3}$, et elle satisfait bien (E) y compris en $x = 0$. C'est donc bien l'unique solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 3. Les trois équations à étudier sont linéaires du second ordre à coefficients constants. On commence donc par résoudre l'équation homogène associée ((E_1) est déjà homogène) à l'aide du polynôme caractéristique de l'équation, puis (pour (E_2) et (E_3)) on détermine une solution particulière de l'équation complète en remarquant que le second membre est de type polynomial ou exponentiel (et en particulier défini sur $\mathbb{R}$ tout entier), et on déduit enfin l'ensemble de toutes les solutions de l'équation initiale, qui sont elles aussi définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

1. Le polynôme caractéristique de l'équation homogène (E_1) est $\chi_1(X) = X^2 - 5X + 6$, qui a deux racines réelles distinctes 2 et 3. L'ensemble des solutions maximales de (E_1) est donc

$$\left\{ f : x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^{3x},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Le polynôme caractéristique de l'équation homogène (EH_2) associée à (E_2) est $\chi_2(X) = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$, qui a 2 pour racine réelle double. L'ensemble des solutions maximales de (EH_2) est donc

$$\left\{ f : x \in \mathbb{R} \mapsto (\lambda + \mu x) e^{2x},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Le second membre de (E_2) est polynomial de degré 2 donc (E_2) admet une solution particulière polynomiale de degré 2. Déterminons-la. Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $f : x \in \mathbb{R} \mapsto ax^2 + bx + c$, de dérivées première et seconde $f' : x \mapsto 2ax + b$ et $f'' : x \mapsto 2a$, est solution de (E_2) si et seulement si

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ 2a - 4(2ax + b) + 4(ax^2 + bx + c) = x^2 \\
&\qquad \Leftrightarrow\ \forall x \in \mathbb{R},\ 4ax^2 + 4(b - 2a)x + (2a - 4b + 4c) = x^2 \\
&\qquad \Leftrightarrow\ \text{(par identification)} \begin{cases} 4a = 1 \\ 4(b - 2a) = 0 \\ 2a - 4b + 4c = 0 \end{cases} \\
&\qquad \Leftrightarrow\ a = \tfrac{1}{4},\ b = 2a = \tfrac{1}{2} \text{ et } c = \tfrac{1}{4}(4b - 2a) = \tfrac{3}{8}.
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions maximales de (E_2) est

$$\left\{ f : x \in \mathbb{R} \mapsto (\lambda + \mu x) e^{2x} + \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{8},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. Le polynôme caractéristique de l'équation homogène (EH_3) associée à (E_3) est $\chi_3(X) = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$, qui a deux racines réelles distinctes 1 et -1. L'ensemble des solutions maximales de (EH_2) est donc

$$\left\{ f : x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{-x},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Le second membre de (E_2) est de la forme $x \mapsto e^{rx}$ avec r racine simple du polynôme caractéristique donc (E_3) admet une solution particulière de la forme $f : x \mapsto axe^{rx}$, avec $a \in \mathbb{R}$. Une telle f a pour dérivées successives $f' : x \mapsto axe^x + ae^x = (ax + a)e^x$ et $f'' : x \mapsto (ax + a)e^x + ae^x = (ax + 2a)e^x$, donc elle est solution de (E_3) si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (ax + 2a)e^x - axe^x = e^x,\ \text{i.e. } a = \tfrac{1}{2}.$$

Finalement, l'ensemble des solutions maximales de (E_3) est

$$\left\{ f : x \in \mathbb{R} \mapsto (\lambda + \tfrac{x}{2}) e^{x} + \mu e^{-x},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 4. Dans tous ces exemples, on a procédé par équivalences pour déterminer les solutions, mais il peut être plus simple (bien qu'un peu plus long), d'un point de vue rédactionnel, de procéder par analyse synthèse : “si f est solution, alors...”, puis vérifier que la formule obtenue donne bien une solution.

1. (E_1) est de la forme $y' = f(y)$ avec f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique. Elle est en outre autonome (pas de dépendance en t) donc il suffit de déterminer les solutions avec condition initiale du type $y(0) = \alpha \in \mathbb{R}$ pour en déduire toutes les autres. En effet, si $(t_0, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ et si $z :]a, b[\to \mathbb{R}$ est l'unique solution maximale du pb de Cauchy

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = \alpha \end{cases},$$

l'unique solution maximale du pb de Cauchy

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(t_0) = \alpha \end{cases}$$

est $t \in]a + t_0, b + t_0[\mapsto z(t - t_0)$. En effet, c'est une solution (vérification immédiate), elle est maximale sinon z ne le serait pas (à vérifier), et on conclut par unicité.

Soit donc $\alpha \in \mathbb{R}$ et z une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant 0. Alors :

$$\begin{aligned}
&z \text{ est sol. du pb deCauchy } \begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = \alpha \end{cases} \\
&\Leftrightarrow\ z(0) = \alpha \text{ et } \forall t \in I,\ z'(t) = 1 + (z(t))^2\ (\neq 0) \\
&\Leftrightarrow\ z(0) = \alpha \text{ et } \forall t \in I,\ \frac{z'(t)}{1 + (z(t))^2} = 1 \\
&\Leftrightarrow\ z(0) = \alpha \text{ et } \forall t \in I,\ \int_0^t \frac{z'(s)}{1 + (z(s))^2} ds = t \\
&\Leftrightarrow\ z(0) = \alpha \text{ et } \forall t \in I,\ \int_{z(0)}^{z(t)} \frac{du}{1 + u^2} = t \\
&\Leftrightarrow\ \forall t \in I,\ \arctan(z(t)) - \arctan(\alpha) = t \\
&\text{(ceci entraîne bien } z(0) = \alpha \text{ par injectivité de arctan)} \\
&\Leftrightarrow\ \forall t \in I,\ \arctan(z(t)) = t + \arctan(\alpha) \\
&\Leftrightarrow\ \forall t \in I, t + \arctan\alpha \in]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\text{ et } z(t) = \tan(t + \arctan\alpha) \\
&\Leftrightarrow\ I \subset]-\tfrac{\pi}{2} - \arctan\alpha, \tfrac{\pi}{2} - \arctan\alpha[\text{ et } \forall t \in I, z(t) = \tan(t + \arctan\alpha).
\end{aligned}$$

Ainsi, la solution maximale de (E_1) valant α en 0 est

$$t \in]-\tfrac{\pi}{2} - \arctan\alpha, \tfrac{\pi}{2} - \arctan\alpha[\mapsto \tan(t + \arctan\alpha).$$

2. Pour (E_2), on raisonne comme pour (E_1). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et z une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant 0. Alors

$$\begin{aligned}
&z \text{ est sol. du pb de Cauchy } \begin{cases} y' = e^y \\ y(0) = \alpha \end{cases} \\
&\Leftrightarrow\ z(0) = \alpha \text{ et } \forall t \in I,\ z'(t) = e^{z(t)}\ (\neq 0) \\
&\Leftrightarrow\ z(0) = \alpha \text{ et } \forall t \in I,\ \frac{z'(t)}{e^{z(t)}} = z'(t)e^{-z(t)} = -(e^{-z})'(t) = 1 \\
&\Leftrightarrow\ \forall t \in I,\ e^{-\alpha} - e^{-z(t)} = t \\
&\text{(ceci entraîne bien } z(0) = \alpha \text{ par injectivité de exp)} \\
&\Leftrightarrow\ \forall t \in I,\ e^{-z(t)} = e^{-\alpha} - t \\
&\Leftrightarrow\ \forall t \in I, e^{-\alpha} - t > 0 \text{ et } -z(t) = \ln(e^{-\alpha} - t) \\
&\Leftrightarrow\ I \subset]-\infty, e^{-\alpha}[\text{ et } \forall t \in I, z(t) = -\ln(e^{-\alpha} - t).
\end{aligned}$$

Ainsi, la solution maximale de (E_2) valant α en 0 est

$$t \in]-\infty, e^{-\alpha}[\mapsto z(t) = -\ln(e^{-\alpha} - t).$$

3. (E_3) est de la forme $y' = f(t)g(y)$ avec f et g de classe C^1 (sur $\mathbb{R}$) donc le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique. En particulier, la fonction constante égale à 0 est solution donc par unicité de la solution maximale à condition initiale donnée, les autres solutions ne s'annulent pas. Soit donc $(t_0, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ et z une fonction ne s'annulant pas, définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant t_0. Supposons α (et donc z) > 0. Alors :

$$\begin{aligned}
z \text{ est sol. du pb de Cauchy } &\begin{cases} y' = ty \\ y(t_0) = \alpha \end{cases} \\
&\Leftrightarrow\ z(t_0) = \alpha \text{ et } \forall t \in I,\ z'(t) = tz(t) \\
&\Leftrightarrow\ z(t_0) = \alpha \text{ et } \forall t \in I,\ \frac{z'(t)}{z(t)} = t \\
&\Leftrightarrow\ \forall t \in I,\ \ln\left(\frac{z(t)}{\alpha}\right) = \frac{t^2 - t_0^2}{2} \\
&\Leftrightarrow\ \forall t \in I,\ z(t) = \alpha e^{(t^2 - t_0^2)/2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, la solution maximale de (E_3) valant $\alpha > 0$ en t_0 est $t \in \mathbb{R} \mapsto \alpha e^{(t^2-t_0^2)/2}$, et il en est de même pour $\alpha < 0$.

4. Enfin, (E_4) est de la forme $y' = f(t)g(y)$ avec g définie sur $[-1, 1]$ mais de classe C^1 seulement sur $]-1, 1[$, et f définie et C^1 sur $]-1, 1[$. g s'annule en ± 1, donc les fonctions constantes égales à ± 1 sur $]-1, 1[$ sont des solutions (maximales), mais comme g n'est pas C^1 au voisinage de 1, on ne peut pas appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour dire qu'une solution qui prend la valeur ± 1 est constante égale à cette valeur (nous verrons que ce n'est en effet pas le cas). CL s'applique en revanche pour les fonctions définies *et à valeurs dans* $]-1, 1[$. Commençons par trouver les solutions maximales de ce type.

Soient donc $(t_0, \alpha) \in]-1, 1[^2$ et z une fonction C^1 à valeurs dans $]-1, 1[$, définie sur un intervalle ouvert $I \subset]-1, 1[$ (où l'équation a un sens) contenant t_0. Alors :

$$\begin{aligned}
z \text{ est sol. du pb de Cauchy } &\begin{cases} y' = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-t^2}} \\ y(t_0) = \alpha \end{cases} \\
&\Leftrightarrow\ z(t_0) = \alpha \text{ et } \forall t \in I,\ z'(t) = \sqrt{\frac{1-(z(t))^2}{1-t^2}} \\
&\Leftrightarrow\ z(t_0) = \alpha \text{ et } \forall t \in I,\ \frac{z'(t)}{\sqrt{1-(z(t))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \\
&\Leftrightarrow\ \forall t \in I, \arcsin(z(t)) - \arcsin(\alpha) = \arcsin(t) - \arcsin(t_0) \\
&\Leftrightarrow\ \forall t \in I, \arcsin(\alpha) + \arcsin(t) - \arcsin(t_0) \in]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\\
&\quad\ \text{et} \quad z(t) = \sin(\arcsin(t) + \arcsin(\alpha) - \arcsin(t_0))
\end{aligned}$$

(pour $\Leftarrow$, on utilise que $\arcsin \circ \sin = \mathrm{id}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, ce qui n'est pas vrai sur $\mathbb{R}$). Notons $\beta = \arcsin(\alpha) - \arcsin(t_0) \in]-\pi, \pi[$. D'après la dernière équivalence, si z est solution, I est tel que pour tout $t \in I$, $\arcsin(t) + \beta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc

$$\arcsin(t) \in]-\tfrac{\pi}{2} - \beta, \tfrac{\pi}{2} - \beta[\cap]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[=]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2} - \beta[\text{ ou }]-\tfrac{\pi}{2} - \beta, \tfrac{\pi}{2}[$$

selon le signe de β, i.e. $I \subset \,]-1, \cos(\beta)[$ si $\beta \geq 0$ et $I \subset \,]-\cos\beta, 1[$ si $\beta \leq 0$ ($\sin(\frac{\pi}{2}-\beta) = \cos\beta$ et $\sin(-\frac{\pi}{2}-\beta) = -\cos\beta$). Réciproquement, si l'inclusion est satisfaite, la fonction z définie dans la dernière ligne des équivalences est bien solution. Finalement, la solution maximale du problème de Cauchy (toujours avec la contrainte d'être à valeurs dans $]-1,1[$) est la fonction

$$\begin{aligned} z_\beta : t \in I \mapsto \sin(\arcsin(t) + \beta) &= \sin(\arcsin(t))\cos\beta + \sin\beta\cos(\arcsin(t)) \\ &= (\cos\beta)t + (\sin\beta)\sqrt{1-t^2} \end{aligned}$$

avec $I = \,]-1, \cos(\beta)[$ si $\beta \geq 0$ et $I = \,]-\cos\beta, 1[$ si $\beta \leq 0$.

Si maintenant on n'impose plus que les solutions soient à valeurs dans $]-1,1[$ (i.e. qu'elles peuvent aussi prendre les valeurs ± 1), il s'agit de se demander si les solutions ci-dessus peuvent être prolongées à un intervalle plus grand (mais lui toujours inclus dans $]-1,1[$, car l'équation n'a pas de sens pour $t \notin]-1,1[$).

On remarque que si $\beta > 0$, z_β admet pour limite 1 en $\cos(\beta)$, et que donc, de par l'équation, z'_β y admet pour limite 0. z_β se prolonge donc en fonction C^1 sur $]-1, \cos(\beta)]$, toujours solution. La fonction constante égale à 1 étant solution, on peut prolonger z_β à $]-1,1[$ tout entier par cette fonction et ce prolongement est une solution maximale du pb de Cauchy.

Mais $y \mapsto \sqrt{1-y^2}$ n'est pas C^1 au voisinage de 1, donc le théorème de Cauchy Lipschitz ne s'applique pas, et le pb de Cauchy pourrait avoir une autre solution maximale. La seule autre façon de prolonger z_β au delà de $\cos(\beta)$ serait par une solution non constante de l'équation, donc de la forme z_γ, définie à droite de $\cos\beta$ et ayant pour limite 1 en $\cos\beta^+$. Il faudrait donc en particulier que $\cos(\beta)$ soit la borne gauche de l'intervalle maximal de définition de z_γ, donc que γ soit négatif, mais la limite d'un tel z_γ en cette borne gauche est -1.

Ainsi la seule façon de prolonger z_β était finalement par la fonction constante égale à 1. On procède de même pour $\beta < 0$, et on a ainsi déterminé l'ensemble des solutions maximales de l'équation : elles sont toutes définies sur $]-1,1[$ et ce sont les fonctions constantes égales à ± 1 et les fonctions z_β avec $\beta \geq 0$ prolongées par 1 ou les fonctions z_γ avec $\gamma \leq 0$ prolongées par -1.

On constate notamment que pour un $t_0 \in]-1,1[$ donné, il y a une infinité de solutions valant 1 en t_0 : toutes les z_β avec $\beta \geq 0$ et $\cos(\beta) \leq t_0$. Il n'y a donc pas unicité de la solution maximale au problème de Cauchy correspondant.