Feuille 1 : Équations différentielles linéaires

Correction du II

Lorsque ce n'est pas précisé, les fonctions considérées sont définies sur $\mathbb{R}$. C'est notamment le cas dans le 1.

1.a. Soit r une racine réelle de χ, i.e. tel que $r^2 + \alpha r + \beta = 0$, et f la fonction $t \mapsto e^{rt}$, qui est C^∞ sur $\mathbb{R}$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = re^r t$ et $f''(t) = r^2 e^{rt}$ donc

$$f''(t) + \alpha f'(t) + \beta f(t) = (r^2 + \alpha r + \beta)e^r t = 0.$$

Ainsi, f est solution de (EH). Si maintenant r est une racine double de χ, alors $\chi(X) = (X-r)^2$, et en particulier $-2r = \alpha$. La fonction $g : t \in \mathbb{R} \mapsto te^r t$ est C^∞ et satisfait, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par dérivation de produits, $g'(t) = (1 + rt)e^{rt}$ et $g''(t) = (r + r(1 + rt))e^{rt} = (r^2 t + 2r)e^{rt}$, de sorte que

$$g''(t)+\alpha g'(t)+\beta g(t) = ((r^2 t+2r)+\alpha(1+rt)+\beta t)e^{rt} = ((r^2+\alpha r+\beta)t+(2r+\alpha))e^{rt} = 0.$$

Ainsi, g est solution de (EH).

1.b. Supposons que $r = \lambda + i\omega$ soit une racine complexe de χ. Les calculs précédents restent valables pour r complexe. Ainsi, la fonction $f : t \mapsto e^{rt} = e^{\lambda t}e^{i\omega t} = e^{\lambda t}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))$ satisfait encore : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f''(t)+\alpha f'(t)+\beta f(t) = 0$. Mais si on note f_1 la fonction *réelle* $t \mapsto e^{\lambda t}\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\,(f(t))$ et f_2 la fonction *réelle* $t \mapsto e^{\lambda t}\sin(\omega t) = \mathrm{Im}\,(f(t))$, on a $f' = f_1' + if_2'$, $f'' = f_1'' + if_2''$, donc en réordonnant les termes, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$(f_1'' + \alpha f_1' + \beta f_1)(t) + i(f_2'' + \alpha f_2' + \beta f_2)(t) = 0$$

ce qui montre, par identification des parties réelles et imaginaires, que f_1 et f_2 sont solutions de (EH).

1.c. On note f_1 et f_2 les fonctions en question. On suppose $r_1 \neq r_2$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est la fonction nulle. Alors en particulier, par évaluation en 0, $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, i.e. $\lambda_1 = -\lambda_2$. En outre, $\lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_2'$ est encore la fonction nulle, et l'évaluation en 0 donne cette fois $\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 = 0 = \lambda_2(r_2 - r_1)$. Comme $r_2 \neq r_1$, ceci entraîne $\lambda_2 = -\lambda_1 = 0$. Ceci montre que la famille (f_1, f_2) est libre.

1.d. Soit $(\lambda, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. On note à nouveau f_1 et f_2 les fonctions en question. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est la fonction nulle. Alors en particulier, par évaluation en 0, $\lambda_1 = 0$. Mais alors l'évaluation en $\frac{\pi}{2\omega}$ donne $\lambda_2 = 0$. Ainsi, la famille (f_1, f_2) est libre.

1.e. Soit $r \in \mathbb{R}^*$. On note à nouveau f_1 et f_2 les fonctions en question. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est la fonction nulle. Alors en particulier, par évaluation en 0, $\lambda_1 = 0$. Mais alors l'évaluation en 1 donne $\lambda_2 e^r = 0$, ce qui entraîne $\lambda_2 = 0$ puisque $e^r \neq 0$. Ainsi, la famille (f_1, f_2) est libre.

1.f. Bilan : en notant Δ le discriminant de χ,

- si $\Delta > 0$, χ a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, et 1.a et 1.c montrent que $(t \mapsto e^{r_1 t}, t \mapsto e^{r_2 t})$ forme une famille libre de solution de (EH) ;

- si $\Delta = 0$, χ a une racine double réelle r, et 1.a et 1.e montrent que $(t \mapsto e^{rt}, t \mapsto te^{rt})$ forme une famille libre de solution de (EH) ;
- si $\Delta < 0$, χ a deux racines complexes conjuguées $\lambda+i\omega$ et $\lambda-i\omega$ avec $(\lambda,\omega) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$, et 1.b et 1.d montrent que $(t \mapsto e^{\lambda t}\cos(\omega t), t \mapsto e^{\lambda t}\sin(\omega t))$ forme une famille libre de solution de (EH).

2.a. Sur son ensemble de définition,

$$w' = \cancel{f_1'f_2'} + f_1f_2'' - \cancel{f_2'f_1'} - f_2f_1'' = f_1(-\alpha f_2' - \beta f_2) - f_2(-\alpha f_1' - \beta f_1) = -\alpha w,$$

donc w est bien solution d'une EDLH d'ordre 1 (à coefficient constant en l'occurrence ici, mais ce fait est général pour les EDL d'ordre 2, y compris à coefficients variables).

2.b. Si $\chi(X)$ a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, f_i est la fonction $t \mapsto e^{r_i t}$, donc

$$w(0) = (f_1f_2' - f_2f_1')(0) = 1 \times r_2 - 1 \times r_1 \neq 0.$$

Si $\chi(X)$ a une racine réelle simple r, $f_1 = t \mapsto e^{rt}$ et $f_2 = t \mapsto te^{rt}$, de dérivée $t \mapsto (1+rt)e^{rt}$, donc

$$w(0) = (f_1f_2' - f_2f_1')(0) = 1 \times 1 - 0 \times r \neq 0.$$

Enfin si $\chi(X)$ a des racines complexes (non réelles) conjuguées $\lambda \pm i\omega$, $f_1 = t \mapsto e^{\lambda t}\cos(\omega t)$ et $f_2 = t \mapsto e^{\lambda t}\sin(\omega t)$, de dérivées respectives $t \mapsto e^{\lambda t}(\lambda\cos(\omega t) - \omega\sin(\omega t))$ et $t \mapsto e^{\lambda t}(\lambda\sin(\omega t) + \omega\cos(\omega t))$, donc

$$w(0) = (f_1f_2' - f_2f_1')(0) = 1 \times \omega - 0 \times \lambda \neq 0.$$

On a bien dans tous les cas $w(0) \neq 0$. Or d'après la question précédente, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $w(t) = w(0)e^{-\alpha t}$, et l'exponentielle ne s'annule pas, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $w(t) \neq 0$.

ATTENTION ! Le simple fait que f_1 et f_2 soient des éléments linéairement indépendants de $C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ne signifie pas et n'entraîne pas que les vecteurs $\binom{f_1(t)}{f_1'(t)}$ et $\binom{f_2(t)}{f_2'(t)}$ sont linéairement indépendants pour tout t ! Il y a des tas de fonctions linéairement indépendantes dont le DL à l'ordre 1 coincide en un ou plusieurs point(s) ! Donc on ne peut pas montrer comme cela que $w(t) \neq 0$ pour tout t. Il faut utiliser le fait qu'ici f_1 et f_2 sont solution d'une même EDL !!

2.c. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F'(t) = \binom{f'(t)}{f''(t)}$ (la dérivée d'une fonction à valeurs vectorielles ou matricielles s'obtient simplement en dérivant chaque coefficient) et

$$AF(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(t) \\ -\beta f(t) - \alpha f'(t) \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} \Big(\forall t \in \mathbb{R}, \quad F'(t) = AF(t)\Big) &\Leftrightarrow \Big(\forall t \in \mathbb{R}, \quad f''(t) = -\beta f(t) - \alpha f'(t)\Big) \\ &\Leftrightarrow f \text{ est solution de } (EH). \end{aligned}$$

2.d. Pour $i = 1, 2$, f_i est solution de (EH) donc d'après la question précédente, en notant $F_i = \binom{f_i}{f_i'}$, $F_i' = AF_i$, et donc $R' = AR$. En outre, $\det(R) = w$, qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $R(t)$ est inversible.

2.e. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$(R(t))^{-1} = \frac{1}{w(t)} \begin{pmatrix} f_2'(t) & -f_2(t) \\ -f_1'(t) & f_1(t) \end{pmatrix}$$
donc les coefficients de $C = R^{-1}F$ sont dérivables comme sommes de produits de fonctions dérivables. On peut donc écrire, pour tout $t \in \mathbb{R}$, comme pour un produit de fonction, $F'(t) = R'(t)C(t) + R(t)C'(t)$ (on peut justifier cette formule en écrivant que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et tout $t \neq t_0$,
$$\begin{aligned} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} &= \frac{R(t)C(t) - R(t)C(t_0) + R(t)C(t_0) - R(t_0)C(t_0)}{t - t_0} \\ &= R(t)\frac{C(t) - C(t_0)}{t - t_0} + \frac{R(t) - R(t_0)}{t - t_0}C(t_0) \\ &\xrightarrow[t \to t_0]{} R(t_0)C'(t_0) + R'(t_0)C(t_0), \end{aligned}$$
par continuité du produit matriciel ou de façon plus élémentaire par convergence coordonnée par coordonnée). Mais attention, toutes les formules de dérivations de fonctions composées ne s'étendent pas aux matrices !

On a donc $F'(t) = AR(t)C(t) + R(t)C'(t) = AF(t) + R(t)C'(t)$. Donc f est solution de (EH) si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $R(t)C'(t) = \binom{0}{0}$, ce qui équivaut à $C'(t) = \binom{0}{0}$ car $R(t)$ est inversible. Finalement, on a bien que f est solution de (EH) si et seulement si C est une fonction constante.

2.f. Ainsi, f est solution de (EH) si et seulement si il existe $C = \binom{c_1}{c_2} \in \mathbb{R}^2$ tel que $\binom{f}{f'} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{pmatrix} C$, i.e. tel que $f = c_1 f_1 + c_2 f_2$ et $f' = c_1 f_1' + c_2 f_2'$ (cette deuxième condition étant redondante car découlant de la première). L'ensemble des solutions de (EH) est donc bien l'ensemble des fonctions de la forme $c_1 f_1 + c_2 f_2$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, (f_1, f_2) en formant une famille libre et génératrice, donc une base. Les différents cas de figure selon le discriminant du polynôme caractéristique ont été donnés dans la question 1.f.

2.g. Soit f une solution, donc de la forme $c_1 f_1 + c_2 f_2$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned} \binom{f(t_0)}{f'(t_0)} = \binom{y_0}{y_0'} &\Leftrightarrow \binom{c_1 f_1(t_0) + c_2 f_2(t_0)}{c_1 f_1'(t_0) + c_2 f_2'(t_0)} = \binom{y_0}{y_0'} \\ &\Leftrightarrow R(t_0)\binom{c_1}{c_2} = \binom{y_0}{y_0'} \\ &\Leftrightarrow \binom{c_1}{c_2} = (R(t_0))^{-1}\binom{y_0}{y_0'}. \end{aligned}$$
Donc il existe bien une unique $f \in \mathrm{Sol}(EH)$ tel que $f(t_0) = y_0$ et $f'(t_0) = y_0'$.

2.h. Le polynôme caractéristique de cette EDL d'ordre 2 homogène à coefficients constants est $X^2 + \omega^2$, qui a deux racines imaginaires pures $\pm i\omega$ si $\omega \neq 0$, et une racine réelle double 0 sinon. L'ensemble des solutions de l'équation est donc dans le premier cas
$$\{f : x \in \mathbb{R} \mapsto c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$
et dans le second cas
$$\{f : x \in \mathbb{R} \mapsto c_1 + c_2 t,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\},$$
c'est-à-dire l'ensemble des fonctions affines.

3.a. On montre comme en $I.B.1$ que $\mathrm{Sol}(E) = \{p\} + \mathrm{Sol}(EH)$.

3.b. Plus précisément, montrons que si d est une fonction polynomiale $P : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ de degré n, (E) admet une solution polynomiale de degré n. Soit $Q : x \mapsto \sum_{k=0}^n b_k x^k$ une fonction polynomiale de degré n. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$Q'(x) = \sum_{k=1}^{n} k b_k x^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) b_{j+1} x^j$$

et de la même façon

$$Q''(x) = \sum_{l=0}^{n} (l+2)(l+1) b_{l+2} x^l,$$

donc

$$\begin{aligned} Q''(x)+&\alpha Q'(x) + \beta Q(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \left((k+2)(k+1)b_{k+2} + \alpha(k+1)b_{k+1} + \beta b_k\right) x^k + (\alpha n b_n + \beta b_{n-1}) x^{n-1} + \beta b_n x^n. \end{aligned}$$

Donc par identification, Q est solution si et seulement si

$$\begin{cases} & a_n &= \beta b_n \\ & a_{n-1} &= \alpha n b_n + \beta b_{n-1} \\ \forall k \in [\![0, n-2]\!], & a_k &= (k+2)(k+1)b_{k+2} + \alpha(k+1)b_{k+1} + \beta b_k \end{cases},$$

ce qui se réécrit :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} b_n \\ \vdots \\ b_0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } M \text{ de la forme } \begin{pmatrix} \beta & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \beta \end{pmatrix}.$$

Comme $\beta \neq 0$, la matrice M est inversible, donc il existe un unique vecteur $\begin{pmatrix} b_n \\ \vdots \\ b_0 \end{pmatrix}$ satisfaisant cette égalité, ce qui conclut.

Supposons maintenant que d est de la forme $x \mapsto e^{\lambda x} P(x)$ avec P polynomiale de degré n. Soit $Q : x \mapsto \sum_{k=0}^m b_k x^k$ une fonction polynomiale et $f : x \mapsto e^{\lambda x} Q(x)$. Après calcul, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(f'' + \alpha f' + \beta f)(x) = e^{\lambda x} \left(Q'' + (2\lambda + \alpha) Q' + (\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta) Q\right)(x).$$

Ainsi, f est solution ssi Q est solution de

$$(*) \quad y'' + (2\lambda + \alpha) y' + (\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta) y = P,$$

équation du type étudié précédemment (à condition que $\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta \neq 0$, c'est-à-dire que λ ne soit pas racine du polynôme caractéristique), et qui admet une solution polynomiale de degré n, donc l'équation initiale admet bien une solution de la forme $x \mapsto e^{\lambda x} Q(x)$ avec Q du même degré que P. Si λ est racine simple du polynôme caractéristique, on montre de la même manière que $(*)$ admet une infinité de solutions polynomiales de degré $n+1$, et exactement une valant 0 en 0. Enfin si λ est racine double du polynôme caractéristique, on montre que $(*)$ admet une infinité de solutions polynomiales de degré $n+2$, et exactement une ayant 0 pour racine double.

Finalement, l'équation initiale admet exactement une solution de la forme $x \mapsto x^k R(x) e^{\lambda x}$ où k est la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique et R est polynomiale de degré n.

Application. On commence par résoudre l'équation homogène. Son polynôme caractéristique est X^2-3X+2 qui a deux racines réelles distinctes 1 et 2, donc l'ensemble de ses solutions est

$$\left\{ f : x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

D'après ce qui précède, 1 étant racine simple du polynôme caractéristique et $x \mapsto x+1$ polynomiale de degré 1, l'équation globale a une solution particulière de la forme $f : x \mapsto (ax^2+bx)e^x$. Après calculs,

$$\begin{aligned}(f'' - 3f' + 2f)(x) &= (0x^2 + ((4a+b) - 3(2a+b) + 2b)x + (2a+2b) - 3b)e^x \\ &= -2ax + 2a - b\end{aligned}$$

donc comme f est solution,

$$-2a = 1 \quad \text{et} \quad 2a - b = 1$$

ce qui donne

$$a = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad b = -2.$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation étudiée est

$$\left\{ g : x \in \mathbb{R} \mapsto (-\tfrac{1}{2}x^2 - 2x + \lambda)e^x + \mu e^{2x},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

3.c. Étant données des fonctions c_1, c_2 sur I,

$$\begin{cases} c_1 f_1 + c_2 f_2 &= f \\ c_1 f_1' + c_2 f_2' &= f' \end{cases} \Leftrightarrow\ R\binom{c_1}{c_2} = \binom{f}{f'} \ \Leftrightarrow\ \binom{c_1}{c_2} = R^{-1}\binom{f}{f'}.$$

Or les composantes de $R^{-1}\binom{f}{f'}$ sont C^1 (déjà vu ou presque), donc il existe bien un unique couple (c_1, c_2) de fonctions C^1 telles que $\begin{cases} c_1 f_1 + c_2 f_2 &= f \\ c_1 f_1' + c_2 f_2' &= f' \end{cases}$.

3.d. La réponse à cette question est quasi-identique à celle de 2.e.

3.e. On commence par résoudre l'équation homogène. Son polynôme caractéristique est X^2+1 qui a deux racines imaginaires pures $\pm i$, donc l'ensemble de ses solutions est

$$\{ f : x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation complète sous la forme $f = c_1 \cos + c_2 \sin$ avec c_1 et c_2 de classe C^1 sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. D'après ce qui précède, f est solution ssi

$$C' = \begin{pmatrix} \cos & \sin \\ -\sin & \cos \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos & -\sin \\ \sin & \cos \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tan \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$C : x \mapsto \binom{\ln(\cos)}{x}$ satisfait cette égalité, donc $f : x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\mapsto (\cos x)\ln(\cos x) + x \sin x$ est une solution particulière de l'équation, et l'ensemble de toutes les solutions est

$$\left\{ g : x \in]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\mapsto (\lambda + \ln(\cos x))\cos(x) + (\mu + x)\sin(x),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$