Équations différentielles

Résolution complète d'un exemple donné en cours

Étant donné $(t_0, \alpha) \in \mathbb{R}^2$, on veut résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = y^2 - 1 \\ y(t_0) = \alpha. \end{cases}$$

L'équation différentielle $(E) : y' = y^2 - 1$ est de la forme $y' = f(y)$ avec $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 - 1$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique : le problème de Cauchy ci-dessus a une unique solution. En particulier, les fonctions constantes égales à ± 1 (points où f s'annule) étant des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$, toute solution maximale de (E) prenant la valeur ± 1 en un certain $t_0 \in \mathbb{R}$ coïncide sur son intervalle de définition avec la solution constante égale à ± 1 puisqu'elles sont solutions du même problème de Cauchy. Inversement, si $\alpha \neq \pm 1$, l'unique solution du problème de Cauchy ci-dessus ne prend pas les valeurs 1 et -1 sur son intervalle de définition.

L'équation est en outre autonome (pas de dépendance en t) donc il suffit de déterminer les solutions avec condition initiale du type $y(0) = \alpha \in \mathbb{R}$ pour en déduire toutes les autres. En effet, si $(t_0, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ et si $z :]a, b[\to \mathbb{R}$ est l'unique solution maximale du pb de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 - 1 \\ y(0) = \alpha \end{cases},$$

l'unique solution maximale du pb de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 - 1 \\ y(t_0) = \alpha \end{cases}$$

est $t \in]a + t_0, b + t_0[\mapsto z(t - t_0)$. En effet, c'est une solution (vérification immédiate), elle est maximale sinon z ne le serait pas (à vérifier), et on conclut par unicité.

Soit donc $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \pm 1$ et z une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant 0, et ne prenant pas les valeurs ± 1. Alors :

$$\begin{aligned}
z \text{ est sol. du pb de Cauchy } & \begin{cases} y' = y^2 - 1 \\ y(0) = \alpha \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \; z(0) = \alpha \text{ et } \forall t \in I,\, z'(t) = (z(t))^2 - 1 \; (\neq 0) \\
& \Leftrightarrow \; z(0) = \alpha \text{ et } \forall t \in I,\, \frac{z'(t)}{(z(t))^2 - 1} = 1 \\
& \Leftrightarrow \; z(0) = \alpha \text{ et } \forall t \in I,\, \int_0^t \frac{z'(s)}{(z(s))^2 - 1} ds = t \\
& \Leftrightarrow \; z(0) = \alpha \text{ et } \forall t \in I,\, \int_{z(0)}^{z(t)} \frac{du}{u^2 - 1} = t \\
& \Leftrightarrow \; \forall t \in I,\, \int_{\alpha}^{z(t)} \frac{du}{u^2 - 1} = t
\end{aligned}$$

(ceci entraîne bien $z(0)=\alpha$ car $u \mapsto \frac{1}{u^2-1}$ est de signe constant sur tout *intervalle* où elle est définie)

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ \forall t \in I, \frac{1}{2}\int_\alpha^{z(t)} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) = t \\
&\Leftrightarrow\ \forall t \in I, \Big[\ln|u-1| - \ln|u+1|\Big]_\alpha^{z(t)} = 2t \\
&\Leftrightarrow\ \forall t \in I, \ln\left|\frac{z(t)-1}{z(t)+1}\right| = 2t + \ln\left|\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right| \\
&\Leftrightarrow\ \forall t \in I, \left|\frac{z(t)-1}{z(t)+1}\right| = \left|\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right| e^{2t}. \quad (*)
\end{aligned}$$

Pour poursuivre, il faut faire une étude de cas selon la position de α par rapport à ± 1. Supposons pour commencer $|\alpha| > 1$. Alors $|z(t)| > 1$ pour tout $t \in I$ par le TVI puisque $|z(0)| = |\alpha|$, $|z|$ est continue, $|z|$ ne prend pas la valeur 1 et I est un intervalle. Ainsi, $\alpha - 1$ (resp. $z(t)-1$) et $\alpha+1$ (resp. $z(t)+1$) sont de même signe, donc l'équivalence précédente devient :

$$\begin{aligned}
&z \text{ est sol. du pb de Cauchy } \begin{cases} y' = y^2 - 1 \\ y(0) = \alpha \end{cases} \\
&\Leftrightarrow\ \forall t \in I, \frac{z(t)-1}{z(t)+1} = \left(\tfrac{\alpha-1}{\alpha+1}\right) e^{2t} \\
&\Leftrightarrow\ \forall t \in I, 1 - \frac{2}{z(t)+1} = \left(\tfrac{\alpha-1}{\alpha+1}\right) e^{2t} \\
&\Leftrightarrow\ \forall t \in I, \frac{2}{z(t)+1} = 1 - \left(\tfrac{\alpha-1}{\alpha+1}\right) e^{2t} \\
&\Leftrightarrow\ \forall t \in I, 1 - \left(\tfrac{\alpha-1}{\alpha+1}\right) e^{2t} \neq 0 \quad \text{et} \quad z(t) = \frac{2}{1 - \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right) e^{2t}} - 1 \\
&\Leftrightarrow\ \forall t \in I, t \neq \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{\alpha-1}{\alpha+1}\right) \quad \text{et} \quad z(t) = \frac{2}{1 - \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right) e^{2t}} - 1
\end{aligned}$$

Si $\alpha > 1$ (resp. < -1), $\ln\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right) < 0$ (resp. > 0), donc comme $0 \in I$, le début de la dernière proposition est équivalent à : $I \subset \left]\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right), +\infty\right[$ (resp. $\left]-\infty, \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)\right[$). Ainsi, la solution maximale du problème de Cauchy est :

$$t \in I_\alpha \mapsto \frac{2}{1 - \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right) e^{2t}} - 1$$

avec $I_\alpha = \left]\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right), +\infty\right[$ si $\alpha > 1$ et $\left]-\infty, \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)\right[$ si $\alpha < -1$.

Supposons maintenant $|\alpha| < 1$ et reprenons notre série d'équivalences à $(*)$:

$$\begin{aligned}
z \text{ est sol. du pb de Cauchy } &\begin{cases} y' = y^2 - 1 \\ y(0) = \alpha \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \ \forall t \in I, \quad \frac{1 - z(t)}{1 + z(t)} = \left(\tfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) e^{2t} \\
&\Leftrightarrow \ \forall t \in I, \quad -1 + \frac{2}{1 + z(t)} = \left(\tfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) e^{2t} \\
&\Leftrightarrow \ \forall t \in I, \quad \frac{2}{1 + z(t)} = \left(\tfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) e^{2t} + 1 \quad (> 0) \\
&\Leftrightarrow \ \forall t \in I, \quad z(t) = \frac{2}{\left(\tfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) e^{2t} + 1} - 1
\end{aligned}$$

Ainsi, la solution maximale du problème de Cauchy est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ tout entier :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{2}{\left(\tfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) e^{2t} + 1} - 1.$$

(Des arguments théoriques permettaient de prévoir a priori que dans ce cas, la solution maximale serait définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, car elle était à valeurs dans un compact de l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 1$ intervenant dans l'équation.)