Feuille 3 : Séries entières

Exercice 1. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On note R_a le rayon de convergence de la série entière $(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n)$ et on définit

$$E_{\text{borné}}(a) = \{z \in \mathbb{C} : (a_n z^n)_n \text{ est bornée}\}, \quad E_0(a) = \{z \in \mathbb{C} : (a_n z^n)_n \text{ tend vers } 0\}$$

$$E_{\text{CV}}(a) = \{z \in \mathbb{C} : (\Sigma a_n z^n) \text{ CV}\} \quad \text{et} \quad E_{\text{CVA}}(a) = \{z \in \mathbb{C} : (\Sigma a_n z^n) \text{ CVA}\}.$$

1. Justifier que $E_{\text{CVA}} \subset E_{\text{CV}} \subset E_0 \subset E_{\text{borné}}$.
2. Soit $z \in E_{\text{borné}}$. Montrer que si $y \in \mathbb{C}$ satisfait $|y| < |z|$, alors $y \in E_{\text{CVA}}(a)$ (on pourra écrire, si $z \neq 0$, $a_n y^n = a_n z^n (\frac{y}{z})^n$).
3. En déduire que $D(0, R_a) \subset E_{\text{CVA}}$ et que $E_{\text{borné}} \subset \bar{D}(0, R_a)$.
4. Soit $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et E un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ tel que
$$D(0, R) \subset E \subset \bar{D}(0, R).$$
Montrer que $\sup\{|z| : z \in E\} = R$.
5. En déduire que
$$R_a = \sup_{z\in E_{\text{borné}}(a)} |z| = \sup_{z\in E_0(a)} |z| = \sup_{z\in E_{\text{CVA}}} |z|.$$

Ainsi, on a montré que, étant donnée une série entière $(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n)$,

$$\text{si pour un } z \in \mathbb{C} \text{ donné,} \quad \begin{array}{cc} & (a_n z^n) \text{ est bornée} \\ \text{ou} & (a_n z^n) \text{ CV vers } 0 \\ \text{ou} & (\sum a_n z^n) \text{ CV} \\ \text{ou} & (\sum a_n z^n) \text{ CVA} \end{array} \quad \text{alors } R_a \geq |z|.$$

et inversement,

$$\text{si pour un } z \in \mathbb{C} \text{ donné,} \quad \begin{array}{cc} & (a_n z^n) \text{ n'est pas bornée} \\ \text{ou} & (a_n z^n) \text{ diverge} \\ \text{ou} & (\sum a_n z^n) \text{ DV} \\ \text{ou} & (\sum |a_n z^n|) \text{ DV} \end{array} \quad \text{alors } R_a \leq |z|.$$

Exercice 2. Règle(s) de d'Alembert.

1. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive.
   (a) On suppose que $(\frac{u_{n+1}}{u_n})_n$ converge vers $l < 1$. Justifier qu'il existe $\alpha \in [0, 1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq \alpha u_n$. En déduire que la série $(\sum_n u_n)$ converge.
   (b) On suppose que $(\frac{u_{n+1}}{u_n})_n$ tend vers $l \in]1, +\infty[\cup \{+\infty\}$. Justifier qu'il existe $\alpha > 1$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq \alpha u_n$. En déduire que la série $(\sum_n u_n)$ diverge.

(c) Donner un exemple de suite $(u_n)_n$ telle que $(\frac{u_{n+1}}{u_n})_n$ converge vers 1 et telle que $(\sum_n u_n)$ converge (resp. diverge).

2. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe ne s'annulant pas. On suppose que $(|\frac{a_{n+1}}{a_n}|)_n$ admet une limite l (finie ou non).

   (a) On suppose $l \in]0, +\infty[$. En posant, pour $z \in \mathbb{C}$, $u_n = a_n z^n$, justifier à l'aide du 1. (avec les notations de l'exercice précédent) que

   $$D(0, \tfrac{1}{l}) \subset E_{\text{CVA}}(a) \subset \bar{D}(0, \tfrac{1}{l})$$

   et en déduire le rayon de convergence R_a de la série entière $(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n)$.

   (b) On suppose $l = 0$. Montrer que $E_{\text{CVA}}(a) = \mathbb{C}$ et en déduire R_a.

   (c) On suppose $l = +\infty$. Montrer que $E_{\text{CVA}}(a) = \{0\}$ et en déduire R_a.

On a ainsi démontré la :

Règle de d'Alembert pour les séries entières : Si une suite $(a_n)_n$ de complexes non nuls satisfait $\lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = l$ alors le rayon de convergence de la série entière $(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n)$ est $\frac{1}{l}$ (avec la convention $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$).

Exercice 3. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

1. Justifier que f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et montrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_k tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(k)}(x) = P_k(\frac{1}{x}) \times f(x)$.

2. Étudier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la limite en 0 de $f^{(k)}$, et en déduire, par récurrence, que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$. Quelles sont ses dérivées successives en 0 ?

3. La fonction f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

Exercice 4. On admet que l'équation $y' = y$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ valant 1 en 0, que l'on appelle *fonction exponentielle*, notée exp.

1. Déterminer le rayon de convergence de sa série de Taylor $(\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\exp^{(n)}(0)}{n!} x^n) = (\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!})$ (puisque $\exp^{(n)}(0) = 1$ par une récurrence immédiate).

2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, solution de $y' = y$, et vaut 1 en 0.

3. En déduire que exp est développable en série entière au voisinage de 0, donner ce développement et son domaine de validité.

Exercice 5. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On définit $f_\alpha : I =]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ par $f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$.

1. Montrer que f_α est solution sur I d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 que l'on notera (E_α).

2. Supposons que f_α soit développable en série entière au voisinage de 0. Déterminer à l'aide de (E_α) les coefficients a_n de ce développement.

3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $(\sum_n a_n z^n)$ pour la suite $(a_n)_n$ de la question précédente.

4. En déduire soigneusement que f_α est développable en série entière au voisinage de 0, donner ce développement et son domaine de validité.

Exercice 6. Déterminer les rayons de convergence des séries entières de terme général :

$$(a)\quad 3^n z^n\ ,\quad (b)\quad n!z^n\ ,\quad (c)\quad \frac{z^n}{n!}\ ,\quad (d)\quad \frac{n^n}{n!}z^n\ ,\quad (e)\quad 2^{-n}(1+\tfrac{1}{n})^{n^2}z^n$$

$$(f)\quad 2^n z^{2n},\quad \text{c'est à dire la série entière } \sum a_n z^n \text{ avec } a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 2^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

$$(g)\quad a_n z^n \text{ avec } a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 2^n & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Exercice 7. Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :

$$\text{(a)} \sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)}\quad ,\quad \text{(b)} \sum_{n\geq 0} n(n+1)x^n\quad ,\quad \text{(c)} \sum_{n\geq 0} \frac{3n}{n+2}x^n\quad ,\quad \text{(d)} \sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n-1}{n!}x^n.$$

Exercice 8.

Partie I

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs telle que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ admette un rayon de convergence R strictement positif. On note :

$$\forall x \in]-R, R[,\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Montrer que $f(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers R par valeurs inférieures si et seulement si f est majorée sur $[0, R[$.

On suppose dans la suite de cette partie que l'une de ces conditions équivalentes est satisfaite et on note L la limite.

2.a. Montrer que pour tout n entier naturel :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k R^k \leq L.$$

2.b. En déduire que la série de terme général $a_n R^n$ est convergente.

2.c. Montrer que la série entière est normalement convergente sur $[-R, R]$. En déduire que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n = \lim_{x\to R^-} f(x).$$

Partie II

Soit (E) l'équation différentielle :

$$4x^2y''(x) + 4xy'(x) - y = \frac{x}{1-x}.$$

3. On note $I =]0,1[$. Quelle est la structure de l'ensemble des solutions de (E) sur I ?

4. Développer en série entière autour de l'origine les fonctions $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et $x \mapsto \frac{1}{1+x}$. Préciser les domaines de convergence des séries obtenues.

5. Trouver une solution de (E) développable en série entière autour de l'origine. Préciser le rayon de convergence de la série obtenue.

6. Soit $\varphi : x \in I \mapsto \varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{4n^2-1}$.

6.a. Déterminer les constantes α et β telles que :

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{4n^2-1} = \frac{\alpha}{2n-1} + \frac{\beta}{2n+1}.$$

6.b. Soient pour $x \in I$ et $u \in I$, $H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$ et $h(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n+1}}{2n+1}$. Montrer que

$$h(u) = \ln \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}.$$

6.c. En déduire une expression simple de $H(x)$. On pourra poser $u = \sqrt{x}$.

6.d. En déduire une expression de $\varphi(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

6.e. Calculer la valeur de $L = \lim_{x\to 1^-} \varphi(x)$.

6.f. En déduire, grâce au résultat de la partie I, la valeur de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

7. On se propose dans cette question de retrouver la valeur de S directement. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1}$. Prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Conclure.