Rappels de topologie

Normes

Définition. Une *norme* sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est une application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ satisfaisant :

- (*positivité*) pour tout $v \in E$, $\|v\| \geq 0$;
- (*séparation* ou *caractère défini*) pour tout $v \in E$, $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0_E$;
- (*homogénéité*) pour tout $v \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda v\| = |\lambda| \times \|v\|$;
- (*inégalité triangulaire*) pour tous $v, w \in E$, $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Un *espace vectoriel normé* est un couple $(E, \|\cdot\|)$ formé d'un espace vectoriel E et d'une norme $\|\cdot\|$ sur cet espace.

Exemples à connaître. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (x_i)^2} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|.$$

$\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^d$ (il y en a une infinité d'autres !)

Définition. Deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur un même $\mathbb{R}$-espace vectoriel E sont dites équivalentes s'il existe des constantes C et $C' > 0$ telles que

$$\forall v \in E, \quad \|v\| \leq C\|v\|' \quad \text{et} \quad \|v\|' \leq C'\|v\|.$$

Deux normes équivalentes définissent les mêmes suites convergentes (vers les mêmes limites), les mêmes ouverts, fermés, compacts (cf. ci-dessous)...

Proposition. *Sur un espace vectoriel de dimension finie (notamment $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$) toutes les normes sont équivalentes.*

On se place dorénavant sur un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

Convergence

Définition. Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ *converge dans* $(E, \|\cdot\|)$ (ou *converge pour la norme* $\|\cdot\|$) vers $l \in E$ si la suite réelle $(\|v_n - l\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 (au sens usuel).

Remarque importante. Dans $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$, muni de n'importe quelle norme, une suite $(v(n))_{n\in\mathbb{N}} = ((v_1(n), \ldots, v_d(n)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l = (l_1, \ldots, l_d)$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, la suite réelle $(v_i(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge (au sens habituel) vers l_i.

Voisinages, ouverts, fermés...

Définition. Pour tout $a \in E$ et tout $r \in \mathbb{R}_+$ on note

$$B(a, r) = \{v \in E : \|v - a\| < r\} \quad \text{et} \quad \bar{B}(a, r) = \{v \in E : \|v - a\| \leq r\}$$

les *boules resp. ouverte et fermée* centrées en a et de rayon r. On appelle $B(0_E, 1)$ (resp. $\bar{B}(0_E, 1)$) la *boule unité ouverte (resp. fermée)* de $(E, \|\cdot\|)$.

Il y a plusieurs façons de définir certaines des notions qui suivent. Selon celle que l'on choisit, les item suivants sont soit des définitions, soit des propositions.

Qualificatifs s'appliquant ou non à une partie A de E :

- A est *bornée* s'il existe $R > 0$ tel que $A \subset \bar{B}(0, R)$.
- A est un *voisinage* d'un élément x de E s'il existe une boule ouverte centrée en x (de rayon > 0) incluse dans A.
- A est *fermée* si elle est stable par passage à la limite, i.e. si pour toute suite à valeurs dans A *qui converge dans* $(E, \|\cdot\|)$, la limite est elle aussi dans A.

  Attention ! Il n'est pas écrit : "si toute suite à valeurs dans A converge dans A" ! Ceci caractérise les sous-ensembles constitués d'au plus un élément, pas les fermés !
- A est *ouverte* si *pour tout* $a \in A$, il existe une boule ouverte centrée en a (de rayon > 0) incluse dans A, autrement dit si A est un voisinage de chacun de ses points.
- A est fermée (resp. ouverte) si et seulement si son complémentaire est ouvert (resp. fermé).

  Attention ! Une partie peut être à la fois ouverte et fermée. Mais dans un evn $(E, \|\cdot\|)$, ce n'est le cas que de E et $\varnothing$.
- A est *dense* si tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de A, ou encore si l'adhérence de A (cf. ci-dessous) est E tout entier, ou encore si tout ouvert non vide de E *rencontre* A (i.e. a une intersection non vide avec A).

Sous-ensembles associés à une partie A de E :

- l'*intérieur* de A est le *plus grand* ouvert de $(E, \|\cdot\|)$ *inclus dans* A, ou encore l'ensemble des éléments de A dont A est un voisinage.
- l'*adhérence* de A est le *plus petit* fermé de $(E, \|\cdot\|)$ *contenant* A, ou encore l'ensemble des limites de suites à valeurs dans A.
- la *frontière* de A est son adhérence privée de son intérieur.

Continuité

Ici, on considère un second evn $(F, \|\cdot\|')$. Une application $f : A \subset E \to F$ est continue en $a \in A$ si : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ \|x - a\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|' < \varepsilon$.

C'est équivalent à : pour toute suite $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a (pour $\|\cdot\|$), $(f(a_n))_n$ converge vers $f(a)$ (pour $\|\cdot\|'$).

On dit que f est continue *sur* A si elle est continue en tout point de A.

C'est équivalent à : pour tout ouvert V de $(F, \|\cdot\|')$, $f^{-1}(V)$ est l'intersection de A et d'un ouvert U de $(E, \|\cdot\|)$. En particulier, si $A = E$, $f : E \to F$ est continue ssi l'image réciproque par f de tout ouvert de $(F, \|\cdot\|')$ est un ouvert de $(E, \|\cdot\|)$.

Compacité

Définition. Une partie A de $(E, \|\cdot\|)$ est compacte si toute suite à valeurs dans A admet une sous-suite convergente (pour $\|\cdot\|$).

Théorème (Bolzano-Weierstrass)**.** *Dans $\mathbb{R}^d$ (muni de n'importe quelle norme), une partie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.*

Théorème. *L'image d'un compact par une application continue est compacte. En particulier, toute application continue définie sur un compact et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.*

Définition. Une application $f : A \subset E \to F$ est uniformément continue si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x, y \in A,\ \|x - y\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|' < \varepsilon.$$

Théorème (Heine)**.** *Toute appli. continue sur un compact est uniformément continue.*