Feuille 3 Séries entières

Exercice 1

(a) $\forall n \geq 1$ $a_n = n \neq 0$, et $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc d'après la règle de d'Alembert, $\boxed{R=1}$ $\left(= \dfrac{1}{1}\right)$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n = n! \neq 0$, et $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)!}{n!} = n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc d'après d'Alembert, $\boxed{R = \text{"}\dfrac{1}{+\infty}\text{"} = 0}$

(c) —— $a_n = \dfrac{1}{n!} \neq 0$ et $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc —— $\boxed{R = \text{"}\dfrac{1}{0}\text{"} = +\infty}$

(d) $\forall n \geq 1$, $a_n = \dfrac{n^n}{n!} \neq 0$ et $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\,\dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$ donc d'après la règle de d'Alembert, $\boxed{R = \dfrac{1}{e}}$

(e) $\forall n \geq 1$, si $a_n = 2^{-n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$, $|a_n|^{1/n} = 2^{-1}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{e}{2}$ donc d'après la règle de Cauchy, $\boxed{R = \dfrac{2}{e}}$

(f) ⚠ D'Alembert et Cauchy ne s'appliquent pas directement à $\sum a_n z^n$. En revanche, $\forall y \in \mathbb{C}$, $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n y^n\right)$ cv ssi $\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} b_k (y^2)^k\right)$ cv avec $b_k = 2^k$. On est donc ramené à l'étude de la série entière $\sum_{k\in\mathbb{N}} b_k z^k$

Si R_b est le rayon de cv de cette série, si $|y^2| < R_b$, $\sum b_k |y^2|^k$ cv donc $\sum a_n |y|^n$ cv
ie si $|y| < \sqrt{R_b}$
et si $|y^2| > R_b$, $\sum b_k |y^2|^k$ DV donc $\sum a_n |y|^n$ DV
ie si $|y| > \sqrt{R_b}$

Ceci montre que $R_a = \sqrt{R_b}$

Cette méthode a l'avantage de marcher quelle que soit la suite (b_k), avec (a_n) définie par $\begin{cases} a_{2k} = b_k, \ \forall k \in \mathbb{N} \\ a_{2k+1} = 0 \end{cases}$. Mais ici on pouvait raisonner à la main directement !

En effet, pour tt $z \in \mathbb{C}$, $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ cv $\Leftrightarrow \sum_{k \in \mathbb{N}} (2z^2)^k$ cv $\Leftrightarrow |2z^2| < 1 \Leftrightarrow |z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$

Donc $\boxed{R_a = \frac{1}{\sqrt{2}}}$ (On aurait bien trouvé ici $R_b = \frac{1}{2}$)

(g) Notons $(c_n)_n$ la suite de cette question, et notons $(d_n)_n$ la suite définie par $d_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ impair} \\ 2^n \text{ si } n \text{ pair} \end{cases}$

et $(e_n)_n = (2^n)_n$. On a $\forall n \in \mathbb{N}$ $d_n \leq c_n \leq e_n$.

Par la même méthode que dans la question précédente, on a $R_d = \frac{1}{2}$

On a aussi $R_e = \frac{1}{2} = R_d$ $\left(\sum_{n \geq 0} 2^n z^n \text{ cv} \Leftrightarrow \sum (2z)^n \text{ cv} \Leftrightarrow |z| < \frac{1}{2} \right)$

Donc $\boxed{R_c = \frac{1}{2}}$

Exercice 2 Préliminaires Pour toute fraction rationnelle (non nulle) $\frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$, $P \in \mathbb{R}[X]$, $Q \in \mathbb{R}[X]$, $\left(\sum_{n \geq n_0} \frac{P(n)}{Q(n)} z^n \right)$ a pour rayon de cv $\boxed{1}$.

En effet, à partir d'un certain n_1, $P(n)$ et $Q(n) \neq 0$ (un polynôme a un nb fini de racines)

et si $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$, $\forall n \geq n_1$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{P(n+1)}{P(n)} \times \frac{Q(n)}{Q(n+1)}$

$$\underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{a_p (n+1)^p}{a_p n^p} \times \frac{b_q n^q}{b_q (n+1)^q}$$

où $a_p X^p$ et $b_q X^q$ sont les termes de + haut degré de P et Q resp.

$$\underset{n \to +\infty}{\sim} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{p-q} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 \quad \text{(quels que soient } p \text{ et } q\text{)}$$

et on conclut par la règle de d'Alembert.

Ainsi les rayons de cv de (a), (b) et (c) sont $\boxed{1}$.

a) $\forall x \in]-1, 1[$, notons $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$

Sur l'intervalle ouvert de cv, on peut dériver terme à terme :

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1}, \text{ puis } f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} x^{n-2} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Ainsi $f'(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ 0}}{f'(0)} + \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x)$ $\quad (\forall x \in]-1,1[)$

et $f(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ 0}}{f(0)} + \int_0^x -\ln(1-t)\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{chgt de var} \\ u=1-t}}{=} \int_1^{1-x} -\ln(u)(-du)$

$$= \Big[u\ln u - u\Big]_1^{1-x}$$

$$= (1-x)\ln(1-x) - (1-x) - 0 + 1$$

$$\boxed{f(x) = (1-x)\ln(1-x) + x}$$

<u>Rq</u> Ceci se prolonge par continuité en 1 (est défini en -1, par 1). Or la série de fct° $\sum_{n\geq 2} u_n$ avec $u_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^n}{n(n-1)}$ CVN sur $[-1,1]$ $\left(\|u_n\|_\infty = \frac{1}{n(n-1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \text{ TG d'une série CV par Riemann} \right)$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est définie et C^0 sur $[-1,1]$, et coïncide ac f sur $]-1,1[$, donc avec son prolongement par $C^{té}$ à $[-1,1]$

donc finalement, $\forall x \in [-1,1]$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} = \begin{cases} (1-x)\ln(1-x) + x & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

(et cette somme n'est pas définie si $|x|>1$)

(<u>Vérif</u> $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ donc par "télescopage" $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{2-1} = 1$)

(b) $\forall x \in]-1,1[$, posons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underset{\substack{\uparrow \\ 0 \text{ pour } n=0}}{n(n+1)}\, x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) x^{n-1}$

$$= x \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)(k+2) x^k}$$

$$= F''(x) \text{ où}$$

$$\underset{\substack{\uparrow}}{F(x) =} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

(thm de dérivation terme à terme)

donc $\boxed{f(x) = \frac{2x}{(1-x)^3} \quad \forall x \in]-1,1[}$

(Notons que cette fct° est définie en -1, mais pas $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ où $u_n : x \mapsto n(n+1)x^n$
$]-1,1[$ est <u>le domaine de cv</u> de la série entière étudiée.)

(c) Cette fois-ci, n'oublions pas de déterminer dès le début le domaine de cv. Il contient $]-1,1[$ et est inclus dans $[-1,1]$ par def du domaine de cv. Or pour $|x|=1$, $\frac{3n}{n+2}x^n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$ donc $\left(\sum_{n\geq 0} \frac{3n}{n+2}x^n\right)$ ne converge pas donc le domaine de cv est exactement $]-1,1[$.

Posons $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n}{n+2}x^n$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{3n}{n+2} = \frac{3(n+2)-6}{n+2} = 3 - \frac{6}{n+2}$, donc $f(x) = 3\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}\right)$

(ces sommes sont bien définies)

ie $f(x) = 3\left(\frac{1}{1-x} - 2F(x)\right)$ où $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$

$\forall x \neq 0$
$$= \frac{1}{x^2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2}\right)$$
$$= \frac{1}{x^2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{x^2}\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} t^n\right)dt$$
$$= \frac{1}{x^2}\left(\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - 1\right)dt\right)$$
$$= \frac{1}{x^2}\Big[-\ln(1-t) - t\Big]_0^x$$
$$= \frac{1}{x^2}\left(-\ln(1-x) - x\right)$$

Donc $f(x) = 3\left(\frac{1}{1-x} + \frac{2\ln(1-x)}{x^2} + \frac{2}{x}\right)$ $\forall x \in]-1,1[\setminus \{0\}$

Vérifions que $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$$f(x) = 3\left(1 + o(1) + \frac{2\left(-x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^2} + \frac{2}{x}\right)$$

$$= 3\left(\cancel{1} + o(1) + \left(\cancel{-\frac{2}{x}} - \cancel{1} + o(1)\right) + \cancel{\frac{2}{x}}\right)$$

$$= o(1) \ !$$

(d) Posons $a_n = \frac{\overbrace{n^2+n-1}^{P(n)}}{n!} \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \underbrace{\frac{P(n+1)}{P(n)}}_{\to 1} \times \underbrace{\frac{n!}{(n+1)!}}_{\to 0} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$ donc d'après d'Alembert, $R = +\infty$

$\neq 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$, posons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n-1}{n!} x^n$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{n!} x^n}_{g(x)} - \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}}_{\exp(x)}$$

(la cv de la série se montre de la m façon que celle de la série initiale)

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{n!} x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1) x^{n-1}}{n!} = x \sum_{n=1}^{+\infty} u_n''(x)$$

$n=1$: par terme nul

en posant $u_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!}$

D'après le cours, $\left(\sum_{n \geq 1} \frac{x^{n+1}}{n!}\right)$ a le même rayon de cv que la série initiale et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x\Big(\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n}_{h}\Big)''(x)$ (dérivation terme à terme)

or $h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = x(e^x - 1)$ Donc $h'(x) = e^x - 1 + xe^x$

et $h''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$

et finalement $f(x) = g(x) - e^x = x h''(x) - e^x = (x(x+2) - 1)e^x$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (x^2 + 2x - 1)e^x}$$