Interrogation 1

Questions de cours.
1. Une partie A de E est un ouvert si pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B_{\|\cdot\|}(a, r)$ est inclus dans A.

Une partie A de E est un compact si toute suite dans A admet une sous-suite convergente de limite appartenant à A.

2. L'intérieur $\mathrm{Int}(A)$ de A est le plus grand ouvert de E inclus dans A. Son adhérence $\mathrm{Adh}(A)$ est le plus petit fermé contenant A. Enfin sa frontière $\mathrm{Fr}(A)$ est $\mathrm{Adh}(A) \setminus \mathrm{Int}(A)$.

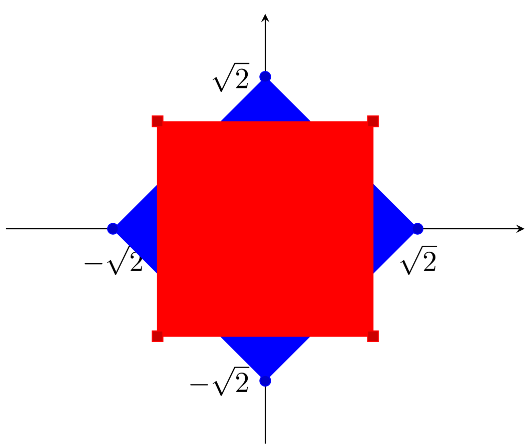
3. Les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont équivalentes s'il existe des constantes C et $C' > 0$ telles que $\|\cdot\| \leq C\|\cdot\|'$ et $\|\cdot\|' \leq C'\|\cdot\|$, i.e. :

$$\forall v \in E, \quad \|v\| \leq C\|v\|' \quad \text{et} \quad \|v\|' \leq C'\|v\|.$$

Exercice 1. 1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|) \quad \text{et} \quad \|(x, y)\|_1 = |x| + |y|.$$

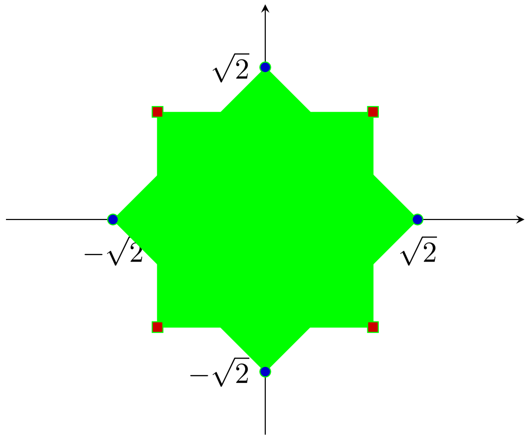
2. $B_{\|\cdot\|_\infty}(O, 1)$ en rouge, et $B_{\|\cdot\|_1}(O, \sqrt{2})$ en bleu (bords inclus) :



3. Pour tout $v \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} v \in A &\Leftrightarrow \|v\|_\infty \leq 1 \text{ ou } \tfrac{1}{\sqrt{2}}\|v\|_1 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \|v\|_\infty \leq 1 \text{ ou } \|v\|_1 \leq \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow v \in B_{\|\cdot\|_\infty}(O, 1) \text{ ou } v \in B_{\|\cdot\|_1}(O, \sqrt{2}) \\ &\Leftrightarrow v \in B_{\|\cdot\|_\infty}(O, 1) \cup B_{\|\cdot\|_1}(O, \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Donc $A = B_{\|\cdot\|_\infty}(O, 1) \cup B_{\|\cdot\|_1}(O, \sqrt{2})$, partie de $\mathbb{R}^2$ représenté en vert ci-dessous (bords inclus).



4. A n'est pas *convexe* : $(1,1)$ et $(\sqrt{2},0)$ appartiennent à A mais le segment les reliant n'est pas inclus dans A. En effet, son milieu, $v=(\frac{1+\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})$, satisfait $\|v\|_\infty=\frac{1+\sqrt{2}}{2}>1$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}\|v\|_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1+\sqrt{2}}{2}>1$.

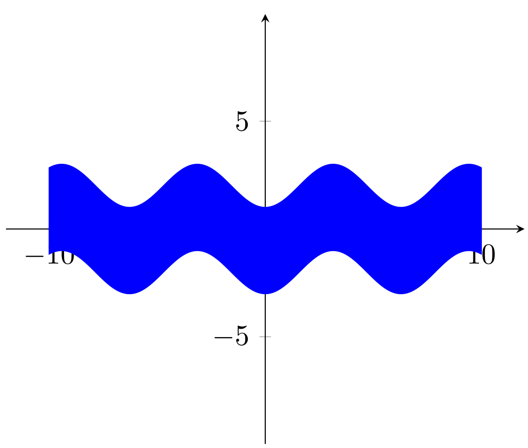
Si on ne pense pas à cet argument géométrique, on peut vérifier facilement que N est positive, définie, et homogène, et il s'agit alors de montrer qu'elle ne satisfait pas l'inégalité triangulaire. Mais pour trouver un contre-exemple, mieux vaut s'aider là encore du dessin...

Exercice 2. Notons A l'ensemble considéré.

1. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}(x,y)\in A &\Leftrightarrow f(x,y)=|y+\cos(x)|\in]-\infty,2[\\ &\Leftrightarrow |y+\cos(x)|<2\\ &\Leftrightarrow -2<y+\cos(x)<2\\ &\Leftrightarrow -2-\cos(x)<y<2-\cos(x).\end{aligned}$$

A est donc la zone comprise strictement entre les graphes des fonctions $x\mapsto -2-\cos(x)$ et $x\mapsto 2-\cos(x)$:



2. Pour tout $r>0$, le point $(r,0)$ appartient à A ($|0+\cos(r)|<2$) mais pas à $B(0,r)$ (pour la norme euclidienne par exemple), donc A n'est inclus dans aucune boule centrée en l'origine, donc A n'est pas borné.

3. "*A* ne contient pas son bord". Par exemple, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=(0,1-\frac{1}{n})$ appartient à A : $|1-\frac{1}{n}+\cos(0)|=2-\frac{1}{n}<2$, mais $(0,2)=\lim_{n\to+\infty}u_n\notin A$.