Interrogation 1

Questions de cours. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$.

1. Donner la définition d'un ouvert de $(E, \|\cdot\|)$, puis d'un compact.
2. Soit A une partie de E. Donner une définition de l'intérieur, de l'adhérence et de la frontière de A.
3. Soit $\|\cdot\|'$ une autre norme sur E. Que signifie que les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont *équivalentes* ?

Exercice 1. On note O le point $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

1. Rappeler la définition des normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Représenter sur un même dessin les boules fermées $\bar{B}_{\|\cdot\|_\infty}(O,1)$ et $\bar{B}_{\|\cdot\|_1}(O,\sqrt{2})$.
3. Décrire le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$

$$A = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \ : \ \min\left(\|v\|_\infty, \frac{1}{\sqrt{2}}\|v\|_1 \right) \leq 1 \right\}$$

   en termes des ensembles de la question précédente et le représenter.
4. L'application N définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall v \in \mathbb{R}^n,\ N(v) = \min\left(\|v\|_\infty, \frac{1}{\sqrt{2}}\|v\|_1 \right)$ est-elle une norme ? Justifier (on pourra utiliser la question précédente).

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = |y + \cos(x)|$.

1. Décrire et représenter $f^{-1}(]-\infty, 2[)$.
2. Cet ensemble est-il borné ?
3. Montrer que cet ensemble n'est pas un fermé de $\mathbb{R}^2$.