L3 Mathématiques
Parcours A 2018–2019

Contrôle Continu n°1

Durée : 1h45
Documents, téléphones et appareils électroniques interdits

Exercice 1 : Diamètre d'un ensemble de $\mathbb{R}$
Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide. On note

$$d(A) = \sup \left\{ |a - a'| \text{ avec } (a,a') \in A^2 \right\} .$$

1. Montrer que $d(A)$ est bien défini (c'est-à-dire un nombre réel fini) si et seulement si A est en outre borné.
2. Montrer que si A est borné, alors $d(A) = \sup(A) - \inf(A)$.

Exercice 2 : Dénombrabilité des maximums stricts locaux
Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que $x_0 \in [0,1]$ est un « sommet » si un maximum local strict est atteint en ce point, c'est-à-dire s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in \,]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\, \cap [0,1] \ , \ \ f(x) < f(x_0) \ .$$

On souhaite étudier le nombre possible de sommets.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note
$$E_n = \left\{ x_0 \in [0,1] \ , \forall x \in \,]x_0 - 1/n, x_0 + 1/n[\, \cap [0,1] \ , \ \ f(x) < f(x_0) \right\} .$$
   (a) Montrer que E_n est vide ou n'a qu'un nombre fini d'éléments.
   (b) En déduire qu'il n'y a qu'un nombre dénombrable de sommets.
2. On considère la fonction
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel} \\ q & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ avec } p \text{ et } q \text{ entiers premiers entre eux.} \end{cases}$$
   Montrer que f n'a aucun sommet.
3. Donner un exemple de fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ avec nombre infini de sommets.

T.S.V.P.

Exercice 3 : Connexité de $\mathbb{R}$
On dit qu'un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est *ouvert* si

$$\forall x \in A \ , \ \exists \varepsilon > 0 \ , \ ]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\subset A \ .$$

Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui sont non vides, disjoints et ouverts. On veut montrer que $A \cup B$ ne peut recouvrir tout $\mathbb{R}$.

On prend $a \in A$ et $b \in B$ et on pose

$$t^* = \sup\{t \in [0,1] \mid a + t(b-a) \in A\} \qquad \text{et} \qquad x^* = a + t^*(b-a) \ .$$

1. Montrer que t^* est bien défini.
2. Montrer que x^* n'est pas dans A *(indication : si $t^* < 1$, on pourra raisonner par l'absurde, utiliser que A est ouvert et considérer le point $x^* + \eta$ avec $\eta \in]0,\varepsilon[\cap]0,b-x^*]$).*
3. Montrer que x^* n'est pas non plus dans B.

Exercice 4 : Sous-suites monotones
Le but de cet exercice est de montrer que de toute suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, on peut extraire une sous-suite monotone (soit croissante, soit décroissante).

1. Montrer que si (u_n) ne tend pas vers $+\infty$, on peut en extraire une sous-suite majorée.
2. Pour cette question, on suppose que $u_n \longrightarrow +\infty$ quand $n \longrightarrow +\infty$.
   (a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on peut trouver $q \in \mathbb{N}$ tel que $q > p$ et $u_q > u_p$.
   (b) En déduire que l'on peut extraire une sous-suite croissante de (u_n).
   (c) Donner un exemple de suite $(u_n) \subset \mathbb{R}$ telle que $u_n \longrightarrow +\infty$ mais (u_n) n'est pas croissante.
3. On suppose dans cette question que (u_n) est majorée.
   (a) Montrer que si $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$ n'est pas atteint, alors on peut extraire de (u_n) une sous-suite croissante.
   (b) Montrer que si pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sup_{n\geq N} u_n$ est atteint, alors on peut extraire de (u_n) une sous-suite décroissante.
4. En rassemblant les propriétés démontrées ci-dessus, conclure que de toute suite réelle, on peut extraire une sous-suite monotone.
5. A l'aide de la propriété ci-dessus, retrouver que de toute suite bornée on peut extraire une sous-suite convergente.

Barème indicatif : 3/5/4/8

Tiers-temps : ne pas faire l'exo 3.