L3 Mathématiques
Parcours A 2018–2019

Contrôle Continu n°1 : Correction

Exercice 1 : Diamètre d'un ensemble de $\mathbb{R}$
Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide. On note

$$d(A) = \sup \left\{ |a - a'| \text{ avec } (a,a') \in A^2 \right\} .$$

1. On note I l'ensemble $\left\{ |a - a'| \, , \, (a,a') \in A^2 \right\}$. Comme A est non vide, on peut choisir $a_0 \in A$. De plus, I est donc non vide car $0 = |a_0 - a_0| \in I$ et la borne sup de I est bien définie si et seulement si I est majoré. Si I est majoré, alors pour tout $a \in A$, $|a| \leq |a_0| + |a - a_0| \leq |a_0| + \sup I$, ce qui montre que A est borné. Si A est borné, alors $|a - a_0| \leq |a| + |a_0|$ est majoré.
2. On suppose maintenant que A est borné. Les bornes sup et inf de A sont bien définies. On a alors
$$a - a' \leq \sup A + \sup(-A) = \sup A - \inf A$$
et par symétrie, la même borne est vérifiée pour $a' - a$. Donc $\sup(A) - \inf(A)$ est un majorant de I. Supposons que $\sup(A) > \inf(A)$ (sinon A est juste un singleton et tout est trivial) et soit $\varepsilon > 0$ assez petit. Il existe $a > a'$ dans A tels que $a \in \,]\sup A - \varepsilon/2, \sup A]$ et $a' \in [\inf A, \inf A + \varepsilon/2[$. On a donc
$$|a - a'| = a - a' > \sup A - \inf A - \varepsilon$$
et $\sup A - \inf A$ est bien le plus petit des majorants de I.

Exercice 2 : Dénombrabilité des maximums stricts locaux
Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note
$$E_n = \left\{ x_0 \in [0,1] \, , \, \forall x \in \,]x_0 - 1/n, x_0 + 1/n[\cap [0,1] \, , \; f(x) < f(x_0) \right\} .$$
   (a) Si x_0 et x_1 sont dans E_n, alors ils sont éloignés d'une distance d'au moins $1/n$ car sinon par définition de E_n, $f(x_0) < f(x_1)$ mais aussi $f(x_1) < f(x_0)$. On ne peut mettre qu'au plus un point de E_n dans les intervalles $[p/n, p + 1/n[$ et donc E_n contient au plus $n + 1$ éléments.
   (b) Tout sommet est dans E_n pour n assez grand et donc l'ensemble des sommets est contenu dans $\cup_n E_n$ qui est une union dénombrable d'ensembles finis et qui est donc dénombrable (par exemple par injection dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$).
2. On considère la fonction
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel} \\ q & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ avec } p \text{ et } q \text{ entiers premiers entre eux.} \end{cases}$$
Dans tout intervalle de $[0,1]$ de taille $\varepsilon > 0$, il existe un rationnel p/q avec $q > 1/\varepsilon$. Donc f n'est bornée dans aucun intervalle de $[0,1]$ et ne peut pas avoir de sommet.
3. La fonction $x \mapsto \cos(1/x)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ admet des maxima locaux en chaque point $1/2k\pi$ et donc un nombre infini de sommets.

Exercice 3 : Connexité de $\mathbb{R}$

Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui sont non vides, disjoints et ouverts. On prend $a \in A$ et $b \in B$ et on pose

$$t^* = \sup\{t \in [0,1] \mid a + t(b-a) \in A\} \qquad \text{et} \qquad x^* = a + t^*(b-a) .$$

1. Le nombre t^* est bien défini car c'est la borne sup d'un ensemble majorée (car inclus dans $[0,1]$) et non vide (car contient 0).
2. Si $t^* = 1$, alors $x^* = b \in B$ n'est pas dans A car ces ensembles sont disjoints. Si $t^* < 1$ et si $x^* \in A$, alors comme A est ouvert, il existerait $\varepsilon > 0$ tel que $a + (t^* + \varepsilon)(b-a)$ soit encore dans A, ce qui contredirait la définition de t^* comme majorant. Donc x^* n'est pas dans A.
3. De même, si x^* était dans B, on aurait $t^* > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, $a + (t^* - \varepsilon)(b-a)$ doit être dans B car B est ouvert. Comme A et B sont disjoints, ces points ne sont pas dans A, ce qui contredirait la définition de t^* comme plus petit majorant. Donc x^* n'est pas non plus dans B et $A \cup B$ ne peut recouvrir tout $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : Sous-suites monotones

1. Si (u_n) ne tend pas vers $+\infty$, alors il existe un nombre M tel que
$$\forall N \in \mathbb{N} \ , \ \exists p(N) \geq N \ , \ u_p \leq M \ . \tag{1}$$
On pose $\varphi(0) = p(0)$, avec $p(0)$ donné par (1) pour $N = 0$. Puis par récurrence, en appliquant (1) pour $N = \varphi(n)+1$, on pose $\varphi(n+1) = p(\varphi(n)+1)$. On obtient bien une fonction φ strictement croissante et pour tout n, $u_{\varphi(n)} \leq M$. La suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ est donc bien majorée.
2. Supposons que $u_n \longrightarrow +\infty$. Par définition, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on peut trouver q_0 tel que u_{q_0} soit strictement plus grand que le nombre u_p. Si $q_0 < p$, on recommence et on prend q_1 tel que $u_{q_1} > u_{q_0}$. Si on a encore $q_1 < p$ on continue. Comme il n'y a qu'un nombre fini d'entiers plus petits que p, on finit pour trouver q_k tel que $q_k > p$. On pose alors $q = q_k$ et on a bien $q > p$ et $u_q > u_p$. Il suffit de réitérer le processus pour obtenir une sous-suite strictement croissante. Notons que l'on peut trouver (u_n) tendant vers $+\infty$ et (u_n) non croissante. Par exemple $u_n = n + (-1)^n$ (inversant les entiers par paire) fait l'affaire.
3. Supposons maintenant que (u_n) est majorée et donc que $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est bien défini.
   (a) Si $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$ n'est pas atteint, alors on peut extraire de (u_n) une sous-suite croissante par le processus déjà vu plus haut. En effet, si u_p est donné, u_p n'étant pas un majorant de (u_n), on peut trouver u_{q_0} tel que $u_{q_0} > u_p$. Si $q_0 < p$, comme u_{q_0} n'est pas non plus un majorant, on trouve q_1 tel que $u_{q_1} > u_{q_0} > u_p$ etc. jusqu'à avoir $q_k > p$.
   (b) Supposons que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sup_{n\geq N} u_n$ soit atteint. On pose $\varphi(0)$ tel que $u_{\varphi(0)} = \sup_{n\geq 0} u_n$. Puis on continue l'extraction pas à pas par récurrence. Si $\varphi(n)$ est construit, on prend $\varphi(n+1)$ tel que $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ et $u_{\varphi(n+1)} = \sup_{k\geq\varphi(n)+1} u_k$. Comme $N \mapsto \sup_{k\geq N} u_k$ est décroissante, la suite ainsi extraite est décroissante.
4. Soit (u_n) une suite réelle. Si (u_n) tend vers $+\infty$, la question 2 implique que l'on peut en extraire une sous-suite croissante. Sinon, on peut en extraire une sous-suite bornée et se ramener à ce cas (question 1). Ensuite, si pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sup_{n\geq N} u_n$ est atteint, la question 3.b précédente conclut à l'existence d'une sous-suite décroissante. Sinon, il existe N tel que $\sup_{n\geq N} u_n$ n'est pas atteint et en appliquant la question 3.a à $(v_n) = (u_{N+n})$ on obtient une sous-suite croissante.
5. Si (u_n) est bornée, comme on peut en extraire une sous-suite monotone, cette dernière sera soit croissante et majorée, soit décroissante et minorée et donc elle sera convergente.