DS 1 de Probas, semestre 2
M1-MEEF, 24 janvier 2019

Exercice n° 1.
On considère l'exercice suivant, trouvé dans un livre de première S :

La française des jeux lance un nouveau jeu de grattage. Elle diffuse sur l'ensemble du territoire un million de tickets et affirme que parmi ces tickets, 5% *sont gagnants. Albert, un joueur invétéré, décide d'acheter les* 200 *tickets présents chez son buraliste. Après grattage, il découvre que seuls* 4 *tickets étaient gagnants. Albert, scandalisé, clame sur facebook que la française des jeux ne distribue pas les tickets totalement au hasard. Qu'en pensez-vous ?*

1. Rédigez une correction soignée de cet exercice au niveau première S, en utilisant un intervalle de fluctuation $[k_1, k_2]$ au niveau 95% d'une loi binomiale bien choisie. (Voir les tables à la fin de l'énoncé).
2. (niveau M1-MEEF) On suppose qu'un groupe de 250 joueurs achète en tout 50 000 tickets par paquets de 200, chaque paquet étant acheté par un joueur différent. Dans la suite, *on suppose que les dires de la Française des jeux sont exacts.*
   (a) On note X_i, pour i allant de 1 à 250, la variable aléatoire représentant le nombre de tickets gagnants dans les 200 tickets du joueur i. Justifiez la modélisation de $(X_1, \ldots, X_{250})$ comme une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(200, p_0)$, où p_0 est une valeur connue que vous préciserez.
   (b) On suppose que chaque joueur de ce groupe effectue une prise de décision avec la même règle de décision que dans la question 1. On note S le nombre de joueurs qui décideront que la Française des jeux ne distribue pas les tickets au hasard. Quelle est alors la loi de S ?
   (c) Que vaut l'espérance de S ?
   (d) Quelle est la probabilité qu'au moins un joueur du groupe décide que la Française des jeux ne distribue pas les tickets au hasard ?

Exercice n° 2.
Dans une usine, on dispose de deux chaînes de production distinctes, produisant le même type de produits. La première chaîne utilise une machine ancienne et l'autre dispose d'une machine très récente. Chaque chaîne fabrique un certain taux de produits défectueux inconnu : on note p_a le taux de produits défectueux de la chaîne ancienne et p_r le taux de produits défectueux de la chaîne récente. Pour cela, on prélève 10 000 produits sur chaque chaîne et on teste s'ils présentent des défauts. On obtient 300 produits sur la chaîne ancienne et 140 sur la récente.

1. En utilisant l'intervalle de confiance de seconde pour le paramètre d'une binomiale [1], donner un intervalle de confiance au niveau 95% pour p_a et un autre au niveau 95% pour p_r. Rédigez ceci comme vous le feriez devant une classe de terminale S.
2. En utilisant ces intervalles de confiance, proposer et mettre en œuvre un test de l'hypothèse « la nouvelle chaîne a un taux de produits défectueux plus faible que l'ancienne ». Rédigez soigneusement ce test : notamment, détaillez la règle de décision avant de l'appliquer avec les données numériques ci-dessus.

1. En fait, celui que l'on peut facilement déduire de l'intervalle de fluctuation de niveau seconde, puisque la notion d'intervalle de confiance a disparu du programme de 2nde en 2017.

Exercice n° 3.
On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X \geq n) > 0 \ .$$

Montrer que X suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}$ si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X \geq n+m | X \geq n) = \mathbb{P}(X \geq m) \ .$$

Exercice n° 4.
Les forces de police d'une ville utilisent un test d'alcoolémie qui n'est pas parfaitement fiable : si le conducteur ne dépasse pas le seuil légal d'alcool dans le sang, le test est tout de même positif dans 5% des cas. Par contre, si le conducteur dépasse le seuil légal, le test est positif dans 98% des cas. Un soir, ces forces de police effectuent un contrôle systématique à un carrefour. On considère qu'à cette heure-là, une proportion de 1% des conducteurs passant par ce carrefour a un taux d'alcool dans le sang dépassant le seuil légal.

1. Introduire un univers très simple représentant les issues possibles de l'état d'un conducteur (seuil légal d'alcool dépassé ou non) et du résultat du test (positif ou non), puis décrire par un arbre pondéré la mesure de probabilité correspondant aux données ci-dessus.
2. Un conducteur, Alfred, est testé positivement. Quelle est la probabilité que son taux d'alcoolémie dépasse le seuil légal ?

Exercice n° 5.
Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On considère une suite $(X_i)_{i \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$, indépendante de N. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $k \in \mathbb{N}$ et tous $x_1, \ldots, x_n$ dans $\{0,1\}$,

$$\mathbb{P}(N = k,\ X_1 = x_1, \ldots,\ X_n = x_n) = \mathbb{P}(N = k) \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i) = \mathbb{P}(N = k) p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{\sum_{i=1}^n (1-x_i)} \ .$$

On note N_2 le nombre d'indices i parmi les N premiers tels que X_i vaille 0 et N_1 le nombre d'indices i parmi les N premiers tels que X_i vaille 1 (remarquez que N est aléatoire !).

L'objectif de cet exercice est de montrer que N suit une loi de Poisson si et seulement si N_1 et N_2 sont indépendantes.

On rappelle que deux variables aléatoires N_1 et N_2 à valeurs dans $\mathbb{N}$ sont indépendantes si et seulement si, pour tous $n_1 \in \mathbb{N}$ et $n_2 \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}((N_1, N_2) = (n_1, n_2)) = \mathbb{P}(N_1 = n_1)\mathbb{P}(N_2 = n_2) \ .$$

Partie 1

Pour n_1 et n_2 entiers, on note :

$$C(n_1, n_1 + n_2) := \left\{ (x_1, \ldots, x_{n_1+n_2}) \in \{0,1\}^{n_1+n_2} \ : \ \sum_{i=1}^{n_1+n_2} x_i = n_1 \right\}$$

1. Que vaut le cardinal de $C(n_1, n_1+n_2)$?
2. Montrer que pour tous n_1 et n_2 dans $\mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}(N_1 = n_1 \text{ et } N_2 = n_2) = \sum_{(x_1,\ldots,x_{n_1+n_2})\in C(n_1,n_1+n_2)} \mathbb{P}(N = n_1+n_2,\ X_1 = x_1, \ldots,\ X_n = x_n)) \ .$$
3. En déduire que pour tous n_1 et n_2 dans $\mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}(N_1 = n_1 \text{ et } N_2 = n_2) = \mathbb{P}(N = n_1+n_2)\binom{n_1+n_2}{n_1} p^{n_1}(1-p)^{n_2} \ . \tag{1}$$
4. On suppose dans cette question que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \geq 0$:
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(N = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \ .$$
En déduire que N_1 et N_2 sont indépendantes, que N_1 suit la loi de Poisson de paramètre λp et que N_2 suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda(1-p)$.

Partie 2

On rappelle que la fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs entières N est la fonction définie (au moins) sur le disque unité fermé $\mathbb{D}$:
$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \ :\ |z| \leq 1\}$$
par :
$$f_N(z) = \mathbb{E}[z^N] = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \mathbb{P}(N = n) \ .$$
On rappelle que f_N est continue sur $\mathbb{D}$ et C^∞ sur $]-1,1[$ avec sur cet intervalle :
$$f_N'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1} \mathbb{P}(N = n) \ .$$
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \mathbb{P}(N = n) \ .$$
Dans la suite, on pourra si on le souhaite ne considérer les fonctions génératrices que sur l'intervalle réel $[-1,1]$.

On admettra que si $(a_{n,m})_{n\in\mathbb{N},\, m\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes telle que :
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} |a_{n,m}|\right) < \infty \ ,$$
alors toutes les séries $\sum_{m=0}^{+\infty} a_{n,m}$ (pour $n \geq 0$) et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,m}$ (pour $m \geq 0$) convergent, ainsi que les séries $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} a_{n,m}$, $\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,m}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{k,n-k}$, et ces trois dernières séries ont même somme :
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} a_{n,m} = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,m} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{k,n-k} \ . \tag{2}$$

On suppose dans cette partie que N_1 et N_2 sont indépendantes.

1. Montrer que si X est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ, la fonction génératrice de X est donnée par
$$\forall \in \mathbb{D},\ f_X(z) = e^{\lambda(z-1)}\ .$$
2. Montrer que s'il existe des constantes $c > 0$ et $\alpha \geq 0$ telles que
$$\forall z \in [0,1]\ , f_X(z) = ce^{\alpha z}$$
alors X suit une loi de Poisson de paramètre α, et $c = e^{-\alpha}$.
3. Montrer que pour $n_1 \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}(N_1 = n_1) = \sum_{n \geq n_1} \mathbb{P}(N = n) \binom{n}{n_1} p^{n_1}(1-p)^{n-n_1}\ .$$
4. En utilisant (2), en déduire que pour $z \in \mathbb{D}$,
$$f_{N_1}(z) = f_N(pz + (1-p))\ .$$
Puis que
$$\forall z \in \mathbb{D},\ f_{N_2}(z) = f_N((1-p)z + p)\ .$$
5. Pour z_1 et z_2 dans $\mathbb{D}$, on note
$$a_{n_1,n_2}(z_1, z_2) := z_1^{n_1} z_2^{n_2} \mathbb{P}((N_1, N_2) = (n_1, n_2))$$
En utilisant (1), montrer que pour z_1 et z_2 dans $\mathbb{D}$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{k,n-k}(z_1, z_2) = f_N(pz_1 + (1-p)z_2)$$
6. Montrer que pour tous z_1 et z_2 dans $\mathbb{D}$,
$$\sum_{n_1=0}^{+\infty} \left(\sum_{n_2=0}^{+\infty} |a_{n_1,n_2}(z_1, z_2)| \right) < \infty\ .$$
7. En déduire que pour z_1 et z_2 dans $\mathbb{D}$
$$\sum_{n_1=0}^{+\infty} \sum_{n_2=0}^{+\infty} a_{n_1,n_2}(z_1, z_2) = \sum_{n_2=0}^{+\infty} \sum_{n_1=0}^{+\infty} a_{n_1,n_2}(z_1, z_2) = f_{N_1}(z_1) f_{N_2}(z_2) = f_N(pz_1 + (1-p)z_2)\ .$$
Et donc que pour z_1 et z_2 dans $\mathbb{D}$
$$f_N(pz_1 + (1-p)z_2) = f_N(pz_1 + (1-p)) f_N((1-p)z_2 + p)\ .$$
8. On suppose dans la suite, sans perdre en généralité, que $p \in [\frac{1}{2}, 1[$. Déduire de la relation précédente que pour tout z_1 de $]-1, 1[$,
$$f_N'(pz_1 + (1-p)) = f_N(pz_1 + (1-p)) f_N'(1)\ .$$
où $f_N'(1)$ est la limite de $f_n'(z)$ quand z tend vers 1^- (on montrera que cette limite existe et est finie).
9. Déduire de la relation précédente que pour tout z de $[0,1]$,
$$f_N'(z) = f_N(z) f_N'(1)\ .$$
10. En déduire que N suit une loi de Poisson.

k	P(B(200,0.05)<=k)	P(B(200,0.05)>=k)	P(B(200,0.02)<=k)	P(B(200,0.02)>=k)
0	0,00004		0,01759	
1	0,00040	0,99996	0,08938	0,98241
2	0,00234	0,99960	0,23515	0,91062
3	0,00905	0,99766	0,43149	0,76485
4	0,02645	0,99095	0,62884	0,56851
5	0,06234	0,97355	0,78672	0,37116
6	0,12374	0,93766	0,89144	0,21328
7	0,21330	0,87626	0,95066	0,10856
8	0,32702	0,78670	0,97983	0,04934
9	0,45471	0,67298	0,99252	0,02017
10	0,58307	0,54529	0,99747	0,00748
11	0,69976	0,41693	0,99921	0,00253
12	0,79648	0,30024	0,99977	0,00079
13	0,87011	0,20352	0,99994	0,00023
14	0,92187	0,12989	0,99999	0,00006
15	0,95564	0,07813	1,00000	0,00001
16	0,97620	0,04436	1,00000	0,00000
17	0,98791	0,02380	1,00000	0,00000
18	0,99418	0,01209	1,00000	0,00000
19	0,99734	0,00582		

Problème 2 : fonction exponentielle, évolution d'une population

On établit dans la partie A l'existence d'une unique solution de l'équation différentielle $y' = y$ vérifiant $y(0) = 1$ et on étudie dans la partie B un exemple d'équation différentielle.
Dans la partie A, les fonctions exponentielles et les fonctions logarithmes sont supposées ne pas être connues.

Partie A : la fonction exponentielle

On s'intéresse dans cette partie à l'équation différentielle (E) : $y' = y$, avec la condition $y(0) = 1$.

1. Dans cette question, on suppose qu'il existe une fonction f dérivable, solution de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$.
   1.1. Démontrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) \times f(-x) = 1$.
   1.2. En déduire que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   1.3. Démontrer que si g est une fonction dérivable solution de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $g(0) = 1$, alors $g = f$.
   On pourra considérer la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$.
   1.4. Démontrer que : $\forall\, (a, b) \in \mathbb{R}^2, f(a + b) = f(a) \times f(b)$.
   On pourra fixer un réel a et considérer la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = \dfrac{f(a+x)}{f(a)}$.
   1.5. Déduire des résultats précédents que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
2. On va dans cette question établir l'existence d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de (E) telle que $f(0) = 1$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout entier $n > |x|$:
$$u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad \text{et} \qquad v_n(x) = \frac{1}{u_n(-x)}.$$
   On va montrer que les suites $(u_n(x))_{n>|x|}$ et $(v_n(x))_{n>|x|}$ sont adjacentes.
   2.1. Justifier que les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ sont bien définies pour $n > |x|$.
   2.2. Établir par récurrence l'inégalité de Bernoulli :
$$\forall\, a \in]-1, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*, (1 + a)^n \geqslant 1 + na$$
   2.3. Soit n un entier tel que $n > |x|$.
      i. Démontrer que : $u_{n+1}(x) = u_n(x) \times \left(1 + \dfrac{x}{n}\right) \times \left(\dfrac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1}$.
      ii. En utilisant l'inégalité de Bernoulli, démontrer que : $\left(\dfrac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} \geqslant \dfrac{1}{1 + \frac{x}{n}}$.
      iii. En déduire que la suite $(u_n(x))_{n>|x|}$ est croissante.
   2.4. Démontrer que la suite $(v_n(x))_{n>|x|}$ est décroissante.
   2.5. Soit n un entier tel que $n > |x|$.
      i. Démontrer que : $v_n(x) - u_n(x) = v_n(x)\left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n\right)$.
      ii. En déduire que : $v_n(x) - u_n(x) \geqslant 0$.

iii. En utilisant l'inégalité de Bernoulli, démontrer que : $v_n(x) - u_n(x) \leqslant v_n(x) \times \dfrac{x^2}{n}$.

2.6. Déterminer, en utilisant les résultats des questions précédentes, la limite de la suite $(v_n(x) - u_n(x))_{n>|x|}$. Conclure.

2.7. On désigne par f la fonction qui à tout réel x associe $f(x)$, limite commune des suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$. On va démontrer que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) et vérifie $f(0) = 1$.

i. Démontrer que : $f(0) = 1$.
Dans les deux questions suivantes, on considère un réel x_0.

ii. On admet que : $\forall\,(a,k) \in \mathbb{R}^2,\ f(a+k) - f(a) \geqslant kf(a)$.
En utilisant cette relation, établir que :

$$\forall\, h \in]-1,1[,\ h\, f(x_0) \leqslant f(x_0+h) - f(x_0) \leqslant \frac{h}{1-h} f(x_0)\,.$$

iii. En déduire que f est dérivable en x_0 de dérivée $f(x_0)$. Conclure.

Partie B : évolution d'une population

Pour étudier l'évolution d'une population de poissons au cours du temps, on utilise le modèle suivant. On admet que la fonction N, représentant le nombre de poissons en fonction du temps t (exprimé en années) vérifie les conditions suivantes :

- N est solution de l'équation différentielle (E) :

$$y' = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right)$$

  où r et K sont des constantes réelles strictement positives ;
- $N(0) = N_0$, avec $0 < N_0 < K$;
- N est définie sur un intervalle ouvert I contenant 0 ;
- si g est une solution de (E) définie sur un intervalle J contenant 0 et vérifiant $g(0) = N_0$, alors J est inclus dans I.

1. Quel théorème permet de garantir l'existence et l'unicité de la fonction N ?

   On admet que I contient $[0, +\infty[$, et que pour tout réel $t \in I$, $0 < N(t) < K$.

2. *Étude qualitative*

   2.1. Démontrer que N est strictement croissante sur I.

   2.2. En déduire que N admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

   2.3. Démontrer que $\ell = K$. *On pourra raisonner par l'absurde.*

3. *Détermination d'une expression de N*

   On pose, pour $t \in I$, $g(t) = \dfrac{1}{N(t)}$.

   3.1. Démontrer que g est solution sur I de l'équation différentielle $(E') : y' = -ry + \dfrac{r}{K}$.

   3.2. Résoudre l'équation différentielle (E'), puis déterminer une expression de N sur I.

   3.3. Retrouver la limite de N en $+\infty$.