Le théorème de Stone-Weierstrass

Preuve guidée

Le but de ce problème est de démontrer le théorème suivant :

Théorème (Stone-Weierstrass)**.** *Soit (E,d) un espace métrique compact et $C(E,\mathbb{R})$ l'algèbre de Banach des fonctions continues de E dans $\mathbb{R}$ (munie de la norme uniforme).*

Si $\mathcal{A} \subset C(E,\mathbb{R})$ est une sous-algèbre qui contient les constantes et sépare les points, alors $\mathcal{A}$ est dense dans $C(E,\mathbb{R})$.

Étape 1. On oublie pour l'instant E. Le but de cette étape préparatoire est de démontrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction racine carrée.

Pour cela, on définit par récurrence les fonctions P_n par :

$$P_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in [0,1],\, \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{t - P_n(t)^2}{2}.$$

1. (facultatif) Proposer une construction graphique de la suite récursive $(P_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ pour un $t \in]0,1]$ donné.

2. Vérifier que

$$\forall t \in [0,1],\, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{t} - P_{n+1}(t) = (\sqrt{t} - P_n(t))\left(1 + \frac{\sqrt{t} + P_n(t)}{2}\right)$$

   et en déduire par récurrence que

$$\forall t \in [0,1],\, \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n(t) \leq \sqrt{t} \quad \text{et} \quad P_n(t) \leq P_{n+1}(t).$$

3. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $(P_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{t}$, c'est-à-dire que la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $\sqrt{\cdot}$ sur $[0,1]$.

4. Conclure concernant la convergence uniforme grâce au théorème de Dini (cf. notes fin du chapitre 1).

Étape 2. But : *Si $f, g \in \bar{\mathcal{A}}$, alors $|f|$, $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ aussi.*

1. Soit $f \in \bar{A}$ non identiquement nulle. On pose $h = \frac{f^2}{\|f\|_\infty^2}$.
   (a) Justifier que $h \in \bar{\mathcal{A}}$ puis que $P_n \circ h \in \bar{\mathcal{A}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où les P_n sont les fonctions polynomiales de l'étape précédente.
   (b) Justifier que $(P_n \circ h)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\sqrt{h}$ sur E.
   (c) En déduire que $|f| \in \bar{\mathcal{A}}$

2. Exprimer le maximum et le minimum de deux réels à l'aide de la valeur absolue, et conclure à l'aide de la question précédente que si $f, g \in \bar{\mathcal{A}}$, alors $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ aussi.

Par récurrence, ce résultat reste vrai pour un nombre fini quelconque de fonctions.

Étape 3. Utiliser les hypothèses sur $\mathcal{A}$ pour montrer que pour tous $x, y \in E$ tels que $x \neq y$ et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il existe $g \in \mathcal{A}$ tel que $g(x) = \alpha$ et $g(y) = \beta$.

Étape 4. Soit $f \in C(E, \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$.

1. Soit $x_0 \in E$.
   (a) Montrer que pour tout $y \neq x_0$, il existe $g_y \in \mathcal{A}$ tel que g_y coïncide avec f en x_0 et y.
   (b) Pour tout $y \neq x_0$, on définit $U_y = \{z \in E | g_y(z) < f(z) + \varepsilon\}$. Montrer que ces ensembles fournissent un recouvrement ouvert de E.
   (c) En extrayant un sous-recouvrement et en utilisant l'étape 2, montrer qu'il existe $h \in \bar{\mathcal{A}}$ tel que $h(x_0) = f(x_0)$ et $h(x) < f(x) + \varepsilon$ pour tout $x \in E$. On note h_{x_0} une telle fonction.
2. (a) Pour tout $x \in E$, on définit $V_x = \{z \in E | f(z) < h_x(z) + \varepsilon\}$. Montrer que ces ensembles définissent un recouvrement ouvert de E.
   (b) En extrayant un sous-recouvrement et en utilisant l'étape 2, montrer qu'il existe $h \in \bar{\mathcal{A}}$ tel que $f(x) - \varepsilon < h(x) < h(x) + \varepsilon$ pour tout $x \in E$. Conclure.