MM049 **2011-2012**
Université Paris 6

Équations différentielles : examen

16 mai 2012

Exercice 1.— On considère le champ de vecteurs défini sur le plan par

$$X(x, y) = (\cos(y), \sin(y)).$$

1. Est-il complet ?

2. Déterminer les droites dont un paramétrage est solution de l'équation différentielle $P' = X(P)$.

3. Déterminer les vecteurs $\vec{u}$ pour lesquels la translation $T_{\vec{u}} : (x, y) \mapsto (x, y) + \vec{u}$ laisse le champ invariant, c'est-à-dire vérifie $T_{\vec{u}}^* X = X$.

4. Trouver un ensemble compact K vérifiant : pour tout t, $\Phi^t(K) \cap K \neq \emptyset$, où $(\Phi^t)_{t\in\mathbb{R}}$ est le flot associé à X.

5. En déduire qu'il n'existe pas de difféomorphisme $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ redressant globalement le champ X, c'est-à-dire tel que le champ $\Psi^* X$ soit un champ de vecteurs constant.

Exercice 2.— Soit X un champ de vecteurs complet sur $\mathbb{R}^d$, et (Φ^t) le flot associé. On rappelle la définition de l'ensemble ω-limite d'un point P : $\omega(P)$ est l'ensemble des points Q qui sont limite d'une suite $(\Phi^{t_n})_{n\geq 0}$ où la suite $(t_n)_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$. On dit qu'un point P est *récurrent* si $P \in \omega(P)$. On dit qu'un point P est *non errant* si pour tout voisinage V de P, il existe un temps $t > 0$ tel que $\Phi^t(V) \cap V \neq \emptyset$. On dit qu'un point P est *ω-limite* s'il existe Q tel que $P \in \omega(Q)$. On considère l'ensemble des points récurrents $R(X)$, l'ensemble des points non-errants $NE(X)$, l'ensemble des points ω-limites $\Omega(X)$.

1. On considère le champ de vecteurs linéaire sur le plan associé à la matrice

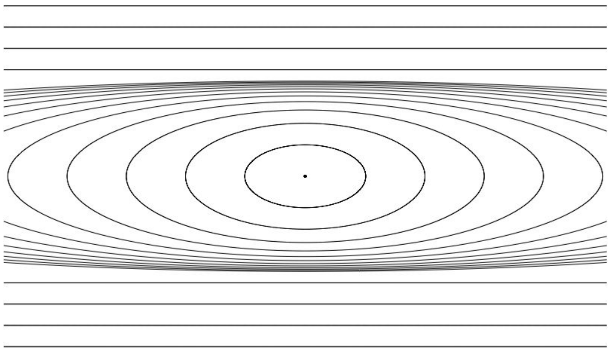
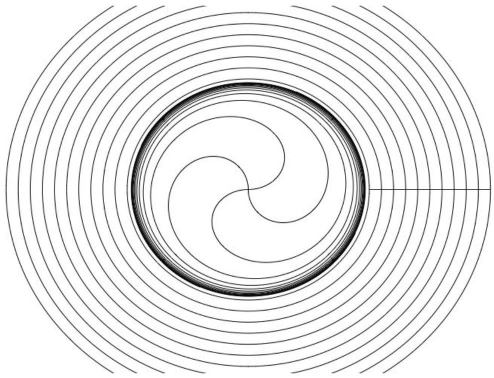
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer sans justification l'ensemble $\omega(P)$ en fonction du point P. On pourra s'aider d'un dessin.

2. Pour un champ X quelconque, montrer que $R(X) \subset \Omega(X)$. Montrer que $\Omega(X) \subset NE(X)$.

3. Les dessins ci-dessous représente des trajectoires de deux champs de vecteurs X_1 et X_2 dans le plan.

- Le champ X_1 s'annule uniquement au point $(0, 0)$; la bande $\{-1 < y < 1\}$, privée du point $(0, 0)$, est remplie par des trajectoires qui sont des ellipses ; les demi-plans $\{y \leq -1\}$ et $\{y \geq 1\}$ sont remplis par des trajectoires qui sont des droites verticales. Toutes les trajectoires sont parcourues à vitesse constante.
- Le champ X_2 s'annule uniquement au point $(0, 0)$ et sur toute la demi-droite $\Delta = \{y = 0, x \geq 1\}$; les trajectoires des points du disque ouvert $\{x^2+y^2 < 1\}$ privé de $(0, 0)$ sont des spirales qui tendent vers $(0, 0)$ dans le passé, et qui s'accumule sur le cercle $\{x^2 + y^2 = 1\}$ dans le futur ; les trajectoires des points hors de ce disque ouvert sont incluses dans un cercle centré en 0.

4. Déterminer les ensembles $R(X_1)$, $\Omega(X_1)$, $NE(X_1)$.

5. Pour le champ X_2, déterminer l'ensemble $\omega(P)$ en fonction du point P. Déterminer les ensembles $R(X_2)$, $\Omega(X_2)$, $NE(X_2)$. En déduire que les inclusions $R(X) \subset \Omega(X) \subset NE(X)$ sont strictes en général.

6. Démontrer que l'ensemble non-errant est invariant par le flot, et qu'il s'agit d'un invariant de conjugaison (bien préciser ce que signifie ces propriétés).

7. (hors-barême) Soit P_0 un zéro du champ X, et P un point. On suppose que

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \Phi^n(P) = P_0.$$

Montrer que $\lim_{t\to+\infty} \Phi^t(P) = P_0$. Est-ce encore le cas si l'on suppose simplement que $\lim_{n\in\mathbb{N}} \Phi^{t_n}(P) = P_0$, où (t_n) estune suite tendant vers $+\infty$?

Exercice 3.— Il s'agit de prouver le théorème suivant, au moins dans le cas $r = 2$:

Théorème (Sternberg, 1957)**.** *Soient U, V deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}$, et $g : U \to V$ une application de classe C^r, où $2 \leq r \leq +\infty$. On suppose que $g(0) = 0$ et que $g'(0) = a$ est strictement positif et différent de 1. Alors g est localement C^r-linéarisable : il existe une application h de classe C^r, définie sur un voisinage de 0, vérifiant $h(0) = 0$ et $h'(0) = 1$, et telle que la relation de conjugaison*

$$hgh^{-1}(y) = ay$$

a lieu pour tout y voisin de 0.

1. Que peut-on dire de mieux lorsque g est analytique ?

2. (Linéarisation formelle) On se place sous les hypothèses du théorème. Montrer qu'il existe une application h vérifiant la conclusion du théorème, à la différence que la relation de conjugaison est remplacée par la propriété plus faible :

$$(hgh^{-1})^{(i)}(0) = 0$$

pour tout $2 \leq i \leq r$. On pourra utiliser le développement de Taylor de g, chercher h sous la forme d'un polynôme, et commencer par le cas $r = 2$.

3. *Dans toute la suite, on suppose pour simplifier que $r = 2$.* Expliquer pourquoi il suffit de montrer le théorème lorsque $0 < a < 1$, et lorsque $g''(0) = 0$: autrement dit, montrer qu'on peut déduire l'énoncé général de l'énoncé incorporant ces deux hypothèses supplémentaires. *On supposera désormais que ces deux conditions sont satisfaites.*

4. On choisit $0 < \delta < 1$ tel que g est défini et inversible sur l'intervalle $[-\delta, \delta]$. Soit E_δ l'espace vectoriel des fonctions Ψ de classe C^r sur $[-\delta, \delta]$ qui vérifient $\Psi(0) = \Psi'(0) = \Psi''(0) = 0$. On le munit de la norme

$$\|\Psi\| = \sup\{\left|\Psi''(t)\right|, t \in [-\delta, \delta]\}.$$

a. Pour $\Psi \in E_\delta$, donner une majoration de Ψ' et de Ψ sur l'intervalle $[-\delta, \delta]$ en fonction de $\|\Psi\|$.

b. En déduire rapidement que l'espace normé $(E_\delta, \|.\|)$ est complet.

c. On considère l'opérateur linéaire $S_\delta : E_\delta \to E_\delta$ défini par $S_\delta(\Psi) = (\Psi \circ g)/a$. Montrer que si δ est assez petit (à préciser), alors cet opérateur est une contraction.

5. On fixe maintenant $\delta > 0$ de façon à ce que S_δ soit une contraction.

a. Rappeler rapidement pourquoi, dans ce cas, l'application linéaire $\mathrm{Id}_{\mathrm{E}_\delta} - S_\delta$ est inversible.

b. On cherche une application h satisfaisant la conclusion du théorème. En écrivant $h = \mathrm{Id} + \Psi_0$ et $g(x) = ax + \Psi_1(x)$, montrer qu'on obtient une équation faisant intervenir l'opérateur S_δ (on fera les vérifications nécessaires, et on précisera quelle est l'inconnue dans l'équation).

c. Conclure.

6. Montrer qu'un h vérifiant la conclusion du théorème est unique.

7. En déduire le cas $r = +\infty$, en admettant le théorème dans tous les cas où r est un entier supérieur ou égal à 2.