Université Pierre et Marie Curie
M1 Mathématiques 2016-2017

Cours de géométrie différentielle 4M022

H. Eynard-Bontemps, A. Oancea

**Examen du 16 décembre 2016**

*Durée : 3 heures*

*Le clarté des explications sera appréciée. Sont autorisées les notes individuelles de cours et de TD, ainsi que le polycopié du cours.*

**Exercice 1**.

Soit $\alpha = dz - ydx \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$. L'on rappelle la signification de la notation : en tout point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ l'on se donne une application linéaire $\alpha_{(x,y,z)} : T_p\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\alpha_{(x,y,z)}(X, Y, Z) = Z - yX$.

1. Calculer $d\alpha$, $\alpha \wedge d\alpha$, $\alpha \wedge d\alpha \wedge d\alpha$.
2. Quelle est la dimension de $\ker \alpha_p$ en un point $p \in \mathbb{R}^3$ ? Donner une base de $\ker \alpha_p$.
3. Déterminer un champ de vecteurs $Z$ sur $\mathbb{R}^3$ tel que $\alpha(Z) = 1$ et $d\alpha(Z, \cdot) = 0$.
4. Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ une courbe lisse. L'on suppose que $\gamma$ est tangente à $\ker \alpha$ en tout point, c'est-à-dire $\alpha_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Écrire l'équation différentielle satisfaite par les composantes de $\gamma$.
5. Montrer que, pour tout choix de points $p, q \in \mathbb{R}^3$, il existe une courbe lisse $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, tangente à $\ker \alpha$, telle que $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$.
6. Nous nous proposons de montrer qu'il n'existe pas de surface de $\mathbb{R}^3$ qui soit tangente en tout point à $\ker \alpha$.
   (a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction lisse et
   $$G = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^3$$
   son graphe. Donner une base de $T_pG$ pour tout $p = (x, y, z) \in G$.
   (b) On suppose $G$ tangent à $\ker \alpha$ en tout point, i.e. $T_pG = \ker \alpha_p$ pour tout $p \in G$. En déduire l'expression des dérivées partielles de $f$ en coordonnées, et aboutir à une contradiction.
   (c) Montrer plus généralement qu'il n'existe pas de surface de $\mathbb{R}^3$ qui soit tangente en tout point à $\ker \alpha$.

**Exercice 2.**

Soit $S^1$ le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ et $\rho : S^1 \to ]0, \infty[$ une fonction lisse. Considérons le lacet $\Gamma_\rho$ image de l'application

$$\begin{array}{rccc} \gamma_\rho : & S^1 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & u & \mapsto & \rho(u)u. \end{array}$$

Soit $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \backslash \{0\})$ une 1-forme fermée. L'on fixe une orientation sur $S^1$.

1. Justifier que $\gamma_\rho$ est un plongement.
2. L'on munit $\Gamma_\rho$ de l'orientation induite par $\gamma_\rho$. Montrer que l'intégrale

$$\int_{\Gamma_\rho} \alpha$$

est indépendante du choix de $\rho$.

3. Que se passe-t-il si $\alpha$ est la restriction d'une 1-forme $\beta \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ ?

**Exercice 3.**

1. Donnez un exemple de champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ sans orbites périodiques.
2. Donnez un exemple de champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ à support compact non identiquement nul qui n'a pas d'orbites périodiques non-constantes.

**Exercice 4.**

Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), z(t))$ une courbe lisse plongée. L'on suppose $x(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Soit $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Considérons l'application $\phi : S^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ obtenue par passage au quotient de l'application $(s, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto (x(t) \cos s, x(t) \sin s, z(t))$.

1. L'on note $R_\gamma = \mathrm{im}(\phi)$. Montrer que $R_\gamma \subset \mathbb{R}^3$ est une sous-variété de dimension 2.
2. Montrer que toutes deux telles surfaces $R_\gamma$ et $R_\delta$ sont difféomorphes.
3. Est-ce que $R_\gamma$ est difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ?
4. Construire sur $R_\gamma$
   – un champ de vecteurs $X$ non-constant dont toutes les orbites sont périodiques,
   – un champ de vecteurs complet $Y$ sans aucune orbite périodique,
   – des champs de vecteurs $X$ et $Y$ comme ci-dessus dont les flots commutent.
5. Montrer que $R_\gamma$ est orientable.