Université Paris VI
LM 125 – Première session (Juin 2010)

Examen de Mathématiques – Durée: 2 heures

Les calculatrices et documents sont interdits. La rédaction doit être concise et précise. Les réponses injustifiées ne seront pas prises en compte. Le barème indiqué est approximatif. L'énoncé comporte deux pages. N'oubliez pas de tourner la page.

Question de cours (10 points)

Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie et F un k-espace vectoriel. Soit $f : E \to F$ une application linéaire de E dans F. On notera Imf l'image de f.

a) (3 points) Rappeler la définition d'une famille génératrice $(e_1, \ldots, e_n)$ de E.

b) (7 points) Montrer que si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice de E, alors $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille géneratrice de Imf

Exercice 1 (18 points)

1) On considère $E = \{(x, z, z, x) \in \mathbb{R}^4 \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2\}$.

a) (2 points) Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

b) (3 points) Donner une base de E.

2) On considère

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \ \ x - y + z + t = 0 \ \text{ et } \ -x + 2y - z + 2t = 0 \ \}$$

a) (2 points) Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

b) (4 points) Donner une base de F.

3) (7 points) E et F sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 2 (18 points)

Soit α un réel. Soit f_α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

a) (5 points) Calculer le déterminant de A_α.

b) (1 point) Pour quelles valeurs de α la matrice A_α est-elle inversible?

c) (7 points) Déterminer le rang de A_α en fonction de α.

d) (5 points) Dans cette question, on suppose que f_α n'est pas inversible. Donner une base de $Im(f_\alpha)$.

Exercice 3 (30 points)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (3x - 2y + 2z, -2x + 3y - 2z, -2x + 2y - z).$$

a) (5 points) Déterminer la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^3$.

b) (5 points) Calculer le polynôme caractéristique $\chi_f(x) = det(A - xI)$ de A et en déduire les valeurs propres de f.

c) (6 points) Déterminer le sous espace propre $Ker(f - \lambda Id)$ associé à chaque valeur propre λ et en donner une base.

d) (4 points) Déterminer une base $\mathcal{B}$ composée de vecteurs propres de f. Quelle est la matrice D de f dans $\mathcal{B}$?

e) (2 points) Déterminer la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$.

f) (8 points) En utilisant la relation liant A, D, P et P^{-1}, calculer A^n pour tout entier $n \geq 1$ (on demande le calcul effectif de tous les coefficients de A^n).

Exercice 4 (6 points)

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que (tan, cos, sin) est une famille libre de E.