UPMC - L1 **2010- 2011**
LM125

Chapitre 2
Systèmes linéaires

Exercice 1. – Opérations élémentaires sur les lignes
Démontrer que les systèmes $a)$, $b)$ et $c)$ sont équivalents au système $\mathcal{S})$:

$$\mathcal{S})\ \begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x+2y-z &= -1 \\ 9x+3y+7z &= 14 \end{cases}$$

$$a)\ \begin{cases} x+2y-z &= -1 \\ 9x+3y+7z &= 14 \\ x+y+z &= 1 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} -x-y-z &= -1 \\ 2x+4y-2z &= -2 \\ 9x+3y+7z &= 14 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} x+2y-z &= -1 \\ 8x+y+8z &= 15 \\ -133x-133y-133z &= -133 \end{cases}$$

Exercice 2. – Résolution de systèmes linéaires pas à pas
On considère le système suivant :

$$\begin{cases} 3x &= -y \\ 6x+z &= 2-2y \\ 3y+7z &= 14-9x \end{cases}$$

1. Donner la matrice augmentée A associée à ce système. Mettre A sous forme échelonnée puis sous forme échelonnée réduite.
2. Donner le nombre de pivots. Le système est-il compatible ? Déterminer l'ensemble des solutions du système linéaire.
3. Mêmes questions pour le système suivant :

$$\begin{cases} 2x+y+z &= 3 \\ 3x-y-2z &= 0 \\ x+y-z &= -2 \\ x+2y+z &= 1 \end{cases}$$

Exercice 3. – Résolution de systèmes linéaires dans $\mathbb{R}$

$$a)\ \begin{cases} x+y+2z &= 5 \\ x-y-z &= 1 \\ x+z &= 3 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 2x-3y+6z+2t &= 5 \\ y-2z+t &= 1 \\ z-3t &= 2 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} x-3y+z &= 1 \\ 2x+y-z &= -1 \\ x+11y-z &= 5 \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} 2x+y-2z & = 10 \\ 3x+2y+2t & = 1 \\ 5x+4y+z+3t & = 14 \end{cases} \qquad e)\ \begin{cases} x+y+z+t = 10 \\ x-y+z+t = 6 \\ x+y-z+t = 4 \\ x+y+z-t = 4 \end{cases} \qquad f)\ \begin{cases} 2x+3y-5z+4t & = 43 \\ -3x+2y+z-2t & = 5 \\ 4x-y+2z+3t & = -13 \\ 5x+y+3z+t & = -28 \end{cases}$$

Exercice 4. – Résolution de systèmes linéaires dans $\mathbb{C}$
Résoudre les systèmes suivants avec x, y, z dans $\mathbb{C}$.

$$a)\ \begin{cases} x+y+2z = 5 \\ x-y-z\ = 1 \\ x+z \quad\ \ = 3 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x+iy+2z = 0 \\ ix+3z \quad\ = 0 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} -2x+y & = -4+i \\ x+iz & = 2-i \\ x-y-iz & = 2 \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} x+y-z & = 1+2i \\ ix-3z & = 3-i \\ x+iy+z & = 2-i \end{cases} \qquad e)\ \begin{cases} x+y+z & = 1 \\ 2x+iy-z & = i \\ -ix+(1+i)y+2iz & = 1 \end{cases}$$

Exercice 5. – Résolution de systèmes linéaires à paramètres
Résoudre (en variables réelles) les systèmes linéaires suivants en discutant selon les paramètres m, a et b.

$$a)\ \begin{cases} x+y+z & = 1 \\ x+2y+3z & = 4 \\ 3x+4y+5z & = m \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x + y + z = a \\ x - ay + z = 2a+1 \\ x + y + az = 3a \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x+y+z & = 3 \\ 3x+6y-9z & = 1 \\ 2x+4y-6z & = a \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} x+ay+bz = 0 \\ ax+y+bz = 0 \\ bx+ay+z = 0 \end{cases}$$

$$e)\ \begin{cases} x+y+(1-m)z & = m+2 \\ (1+m)x-y+2z & = 0 \\ 2x-my+3z & = m+2 \end{cases} \qquad f)\ \begin{cases} ax+y+z & = 1 \\ x+ay+z & = a \\ x+y+(2-a)z & = b-1 \end{cases}$$

Exercice 6. – Résolution avec un second membre général
On considère le système suivant :

$$\begin{cases} 3x+y & = a \\ 6x+2y+z & = b \\ 9x+3y+7z & = c \end{cases}$$

où a, b, c sont des constantes.
Donner la matrice augmentée A associée à ce système. Mettre A sous forme échelonnée puis sous forme échelonnée réduite. Résoudre le système en fonction de a, b, c.