UPMC - L1 **2010-2011**
LM125

Chapitre 3
Espaces vectoriels

Exercice 1. – Lois "inhabituelles" sur $\mathbb{R}^2$
On définit sur $E = \mathbb{R}^2$ les lois $\oplus$ et $\otimes$ de la manière suivante :
- $(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y')$, pour $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$, et
- $\lambda \otimes (x, y) = (\lambda x, \lambda^2 y)$, pour $\lambda, x, y \in \mathbb{R}$.

L'espace $(E, \oplus, \otimes)$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ? Donner deux lois "naturelles" qui font de E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 2. – Intersections et unions de sous-espaces vectoriels
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $U, V \subset E$ deux sous-espaces vectoriels. Montrer que l'intersection de U et V est encore un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $U \cup V$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $U \subset V$ ou $V \subset U$.

Exercice 3. Montrer que le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$ n'admet pas d'autre sous-espace vectoriel que $\{0\}$ et $\mathbb{K}$.

Exercice 4. Quels sont les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel puis comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Exercice 5. Soit $F = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, z_2 = \bar{z}_1\}$.
1. F est-il un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}^2$?
2. F est-il un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}^2$?

Exercice 6. – $E = \mathbb{R}^2$
Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$:

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = x\}, \quad A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = x^2\}, \quad A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq x\}$$

Exercice 7. – $E = \mathbb{R}^3$
Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{ll} A_1 = \{(x, y, 0) \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}, & A_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y + z = 0\}, \\ A_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y + z = 1\}, & A_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = z^2\}, \\ A_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 3x = 2y + 5z\}, & A_6 = \mathbb{Q}^3. \end{array}$$

Exercice 8. – $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
Soit $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

1. L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
2. L'ensemble des fonctions paires.
3. L'ensemble des fonctions impaires.
4. L'ensemble des fonctions croissantes.
5. L'ensemble des fonctions monotones.
6. L'ensemble des fonctions positives.
7. L'ensemble des fonctions bornées.
8. L'ensemble des fonctions dérivables.
9. L'ensemble des fonctions nulles en 1.
10. L'ensemble des fonctions égales à 1 en 0.
11. L'ensemble $\{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ : \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x+1) = 2f(x)\}$.
12. L'ensemble $\{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \ : \ f" = 0\}$.
13. L'ensemble des fonctions 2π-périodiques.

Exercice 9. – $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

1. L'ensemble des matrices inversibles.
2. L'ensemble des matrices symétriques (i.e. telles que $A^T = A$).
3. L'ensemble des matrices antisymétriques (i.e. telles que $A^T = -A$).
4. L'ensemble des matrices dont les termes diagonaux sont égaux à 1.
5. L'ensemble des matrices dont les termes diagonaux sont égaux à 0.
6. L'ensemble des matrices non inversibles.
7. Le commutant de A, pour une matrice A de E fixée (i.e. l'ensemble des $M \in E$ telles que $AM = MA$).

Exercice 10. – $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles. Les ensembles suivants sont-ils des sous-ev de E ?

1. $F = \{(u_n) \in E, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n\}$.
2. L'ensemble des suites géométriques.

Exercice 11. On désigne par E l'espace des applications g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pouvant s'écrire sous la forme

$$g(x) = a\cos(2x) + b\cos(x) + c, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

avec a, b et c dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Soient f et k définies par $f(x) = \sin^2 x$ et $k(x) = \cos^2 x + \sin^2(x/2)$. Les fonctions f et k appartiennent-elles à E ? Quel est le sous-espace engendré par f ?
3. Montrer que l'espace
$$\{a \cos^2 x + b \sin^2(x/2) \ ; \ a, b \in \mathbb{R}\}$$
est un sous-espace de E. Quel est son intersection avec $\mathrm{Vect}(f)$?

Exercice 12. Soit $E = \{f_{a,b} \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ , \ a, b \in \mathbb{R}\}$, où $f_{a,b}(x) := (ax + b)e^{2x}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Démontrer que l'ensemble F des fonctions $f_{a,b}$ monotones sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de E. Le décrire.

Exercice 13. – Sous-espaces supplémentaires

Les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{array}{lll}
F_1 = \{(x, x, x) \ : \ x \in \mathbb{R}\} & et & G_1 = \{(0, x, y) \ : \ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}, \\
F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + 2y + z = 0\} & et & G_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x - 2y + z = 0\}, \\
F_3 = \{(x, y, x + y) \ : \ (x, y) \in \mathbb{R}^2\} & et & G_3 = \{(x, -x, 0) \ : \ x \in \mathbb{R}\}, \\
F_4 = \{(x, y, x + y) \ : \ (x, y) \in \mathbb{R}^2\} & et & G_4 = \{(x, x, 0) \ : \ x \in \mathbb{R}\}, \\
F_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y + z = 0\} & et & G_5 = \{(x, y, x) \ : \ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.
\end{array}$$

Exercice 14. – Sommes directes

On considère les sous-espaces vectoriels F_1, F_2 et F_3 des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont respectivement paires, impaires et nulles en 0.

1. Déterminer les sous-espaces vectoriels $F_1 + F_2$, $F_2 + F_3$ et $F_1 + F_3$.
2. Quels couples de sous-espaces vectoriels sont en somme directe ?

Exercice 15. – Sous-espace vectoriel engendré

Soit $F = \mathrm{Vect}\{(1, 4, 5, 2), (1, 2, 3, 2), (1, 1, 0, -1)\} \subset \mathbb{R}^4$. Le vecteur $t = (1, 0, -1, 5)$ appartient-il à F ?