Chapitre 4
Espaces vectoriels de type fini, bases

Exercice 1. Soit le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - 2y + t = 0 \text{ et } y + z - 3t = 0\}$$

Construire une famille génératrice de F .

Exercice 2. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $V_1 = (1, 0, -2)$ et $V_2 = (3, 1, 2)$.
Caractériser les vecteurs $V = (x, y, z)$ de F par une relation entre x, y et z.

Exercice 3. Les parties suivantes sont-elles génératrices de $\mathbb{R}^3$?

1. $A_1 = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$
2. $A_2 = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$
3. $A_3 = \{(-2, 1, 1), (1, -2, 1), (1, 1, -2)\}$
4. $A_4 = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$
5. $A_5 = \{(-2, 1, 1), (1, -2, 1), (1, 1, -2), (0, -3, 3)\}$

Exercice 4. Soit $\{a_1, \cdots, a_n\}$ une famille génératrice d'un espace vectoriel E et $\{b_1, \cdots, b_p\}$ une famille génératrice d'un espace vectoriel F.
Montrer que la famille $\{(a_1, 0), \cdots, (a_n, 0), (0, b_1), \cdots, (0, b_p)\}$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel produit $E \times F$.

Exercice 5. Dans l'espace vectoriel E des fonctions réelles, on considère les fonctions f, g, h, k définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^x, g(x) = e^{-x}, h(x) = e^{3x}, k(x) = e^{-2x}$$

Montrer que la famille $\{f, g, h, k\}$ est libre.

Exercice 6. Dans l'espace vectoriel E des fonctions réelles, on considère les fonctions f, g, h, k définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = |x|, g(x) = |x - 1|, h(x) = |x + 1|, k(x) = |x - 3|$$

La famille $\{f, g, h, k\}$ est-elle libre ?

Exercice 7. On considère le système $\{u_1, u_2, u_3\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, définis par :

$$u_1 = (1, a, 3), u_2 = (1, 1, a), u_3 = (a, 1, 3), a \in \mathbb{R}$$

Etudier, suivant les valeurs de a, l'indépendance linéaire du système et préciser, chaque fois qu'il est lié, une relation de liaison.

Exercice 8. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ défini par

$$F = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 ; x = y \text{ et } z + t + u = 0\}$$

Montrer que F est un espace de type fini et déterminer une base de F.

Exercice 9. On considère dans $\mathbb{R}^4$: le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs

$$v_1 = (1, 2, 3, 4), v_2 = (2, 2, 2, 6), v_3 = (0, 2, 4, 4)$$

et le sous-espace vectoriel G engendré par les vecteurs

$$w_1 = (1, 0, -1, 2), w_2 = (2, 3, 0, 1)$$

Trouver une base de F, de G, de $F \cap G$.

Exercice 10. Soit F l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère les fonctions f, g, h, k, p, q, r, définies par :

$$f(x) = 1, g(x) = \sin x, h(x) = \sin^2 x, k(x) = \sin 2x$$

$$p(x) = \cos x, q(x) = \cos^2 x, r(x) = \cos 2x$$

On note E_1 le sous-espace engendré par les fonctions $f, g, h,$ et k et on note E_2 celui engendré par f, p, q et r.
Trouver une base de chacun des sous-espaces E_1 et E_2.

Exercice 11. Dans $\mathbb{R}^3$, soit E_1 le sous-espace engendré par $v_1 = (2, 3, -1)$ et $v_2 = (1, -1, -2)$, et E_2 le sous-espace engendré par $w_1 = (3, 7, 0)$ et $w_2 = (5, 0, -7)$.

1. Montrer que $E_1 = E_2$, en donner la dimension.
2. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ contenant les vecteurs v_1 et v_2.

Exercice 12. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les deux sous-espaces vectoriels H_1 (respectivement H_2) d'équations $x + y + z + t = 0$ (respectivement $x - y + z - t = 0$).

1. Caractériser le sous-espace $H_1 \cap H_2$, en donner une base B.
2. En déduire les dimensions des sous-espaces $H_1 \cap H_2$, H_1, et H_2.
3. Compléter la base B de $H_1 \cap H_2$ en une base de H_1 puis de H_2.

Exercice 13. On considère dans $\mathbb{R}^4$, le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (2, 2, 3, 6)$, $v_3 = (0, 2, 4, 4)$ et le sous-espace vectoriel G engendré par les vecteurs $w_1 = (1, 0, -1, 2)$, $w_2 = (2, 3, 0, 1)$.
Trouver une base et la dimension de $F + G$.

Exercice 14. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 3x + 4y - 5z = 0\}$.
Montrer, en utilisant une application linéaire définie sur $\mathbb{R}^3$, que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ puis donner une base de F.

Exercice 15. Soit $E = P_4(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 4. On appelle f l'application linéaire de E dans E définie par $f(p) = q$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, q(x) = p(x) - (x - 1)p'(x)$$

Déterminer une base de chacun des sous-espaces $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$.

Exercice 16. Construire une application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même telle que son image soit le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, engendré par $V_1 = (1, -1, 2)$ et $V_2 = (3, 0, -1)$.

Exercice 17. Construire une application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même dont le noyau soit engendré par les vecteurs $V_1 = (2, 0, -1)$ et $V_2 = (1, 1, 1)$.
Indication : vérifier que la famille $\{V_1, V_2\}$ est libre et la compléter pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$.