UPMC - L1 **2010-2011**
LM125

Chapitre 4 (bis)
Rang d'une application linéaire

Exercice 1. Soit $P_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Pour $i = 0, ..., n$, on définit f_i par :

$$f_i(x) = x^i \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $(f_0, ..., f_n)$ est une base de $P_n(\mathbb{R})$. En déduire la dimension de $P_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel de dimension 5, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$. On considère l'endomorphisme f de E défini par :

$$\begin{aligned}
f(e_1) &= 0 \\
f(e_2) &= e_1 \\
f(e_3) &= e_1 + e_2 \\
f(e_4) &= 2e_1 - e_2 \\
f(e_5) &= e_1 - e_2 + e_3 + e_4
\end{aligned}$$

1. Montrer que $f^3 = 0$.
2. Déterminer le rang de f et le rang de f^2.
   En déduire la dimension du noyau de f et de celui de f^2.
3. Montrer que le sous-espace vectoriel de E engendré par e_3 est un sous-espace vectoriel supplémentaire du noyau de f^2.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel. Soit φ une application linéaire de E dans E vérifiant $\varphi \circ \varphi = 0$.

1. Montrer l'inclusion $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$.
2. On suppose de plus que E est de type fini ; soit n sa dimension. Soit r le rang de φ. Montrer que l'on a la relation $2r \leq n$.
3. On suppose maintenant que $E = \mathbb{R}^2$. Montrer que, ou bien $\varphi = 0$, ou bien il existe une base (u_1, u_2) de E telle que $\varphi(u_1) = u_2$ et $\varphi(u_2) = 0$.