UPMC - L1 **2010-2011**
LM125

Chapitre 5
Correction de quelques exercices

Exercice 4. 1. $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Or

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(L_1 \leftarrow L_1 + L_3)}{=} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \text{(en développant par rapport à } C_3)$$
$$= 3 \neq 0, \quad \textbf{donc } \mathcal{B} \textbf{ est bien une base de } \mathbb{R}^3.$$

Pour déterminer la matrice de φ_m dans la base $\mathcal{B}$, il y a deux otions : *soit* on calcule la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B}_c, \mathcal{B}}$ de la base canonique $\mathcal{B}_c$ à la base $\mathcal{B}$, et son inverse, puis on applique la formule du cours :

$$[\varphi_m]_{\mathcal{B}} = P^{-1} [\varphi_m]_{\mathcal{B}_c} P = P^{-1} A_m P,$$

soit on revient à la définition de la matrice représentative de φ_m dans la base $\mathcal{B}$ (ce que nous allons faire ici, et qui s'avère souvent plus simple dans le cas d'une petite matrice) :

$$[\varphi_m]_{\mathcal{B}} = \begin{array}{ccc} \varphi_m(u_1) & \varphi_m(u_2) & \varphi_m(u_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \end{array}$$
$$[\varphi_m]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{array}{l} \times u_1 \\ \times u_2 \\ \times u_3 \end{array}$$

$[\varphi_m(u_1)]_{\mathcal{B}_c} = [\varphi_m]_{\mathcal{B}_c} . [u_1]_{\mathcal{B}_c} = A_m . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+2 \\ m+2 \\ m+2 \end{pmatrix} = (m+2)[u_1]_{\mathcal{B}_c}$, i.e $\varphi_m(u_1) = (m+2)u_1$;
$[\varphi_m(u_2)]_{\mathcal{B}_c} = [\varphi_m]_{\mathcal{B}_c} . [u_2]_{\mathcal{B}_c} = A_m . \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-m \\ m-1 \\ 0 \end{pmatrix} = (m-1)[u_2]_{\mathcal{B}_c}$, i.e $\varphi_m(u_2) = (m-1)u_2$;
$[\varphi_m(u_3)]_{\mathcal{B}_c} = [\varphi_m]_{\mathcal{B}_c} . [u_3]_{\mathcal{B}_c} = A_m . \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-m \\ 0 \\ m-1 \end{pmatrix} = (m-1)[u_3]_{\mathcal{B}_c}$, i.e $\varphi_m(u_3) = (m-1)u_3$, d'où :

$$[\varphi_m]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} m+2 & 0 & 0 \\ 0 & m-1 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 \end{pmatrix}.$$

2. φ_m est un automorphisme de $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow det(\varphi_m) \neq 0$
$\Leftrightarrow det[\varphi_m]_{\mathcal{B}} \neq 0$
$\Leftrightarrow (m+2)(m-1)^2 \neq 0$
$\Leftrightarrow m \neq -2$ et $m \neq 1$.

3. Cas $m = -2$. $\text{Im}(\varphi_{-2}) = \text{Vect}\{\underbrace{\varphi_{-2}(u_1)}_{0.u_1}, \underbrace{\varphi_{-2}(u_2)}_{1.u_2}, \underbrace{\varphi_{-2}(u_3)}_{1.u_3}\} = \text{Vect}\{u_2, u_3\}$. Or on a vu que u_2 et u_3 sont linéairement indépendants, donc (u_2, u_3) forme une base de $\text{Im}(\varphi_{-2})$, qui est donc de dimension 2.

D'après le théorème du rang, $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker \varphi_{-2}) + \dim(\text{Im}\varphi_{-2})$ donc $\dim(\ker \varphi_{-2}) = 3 - 2 = 1$. Or $u_1 \in \ker \varphi_{-2}$ et $u_1 \neq 0$ donc $\{u_1\}$ forme une base de $\ker \varphi_{-2}$.

4. Cas $m=1$. $\mathrm{Im}(\varphi_1) = \mathrm{Vect}\{\underbrace{\varphi_1(u_1)}_{3.u_1}, \underbrace{\varphi_1(u_2)}_{0.u_2}, \underbrace{\varphi_1(u_3)}_{0.u_3}\} = \mathrm{Vect}\{3.u_1\} = \mathrm{Vect}\{u_1\}$. Comme $u_1 \neq 0$, $\{u_1\}$ forme donc une base de $\mathrm{Im}\varphi_1$, qui est donc de dimension 1.

D'après le théorème du rang, $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker\varphi_1) + \dim(\mathrm{Im}\varphi_1)$ donc $\dim(\ker\varphi_1) = 3-1 = 2$. Or u_2 et $u_3 \in \ker\varphi_{-2}$ et $\{u_2, u_3\}$ est libre d'après 1, donc (u_2, u_3) forme une base de $\ker\varphi_1$.

Exercice 8. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\varphi(z+\lambda z') = u \times (z+\lambda z') = u \times z + \lambda u \times z' = \varphi(z) + \lambda\varphi(z')$$

donc φ est $\mathbb{R}$-linéaire.

Notons $e_1 = 1$ et $e_2 = i$ les éléments de la base $\mathcal{B}$.

$$\begin{array}{cccc} & \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \\ & \downarrow & \downarrow & \\ [\varphi]_{\mathcal{B}} = & \left(\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array}\right) & \begin{array}{l} \times e_1 \\ \times e_2 \end{array} \end{array}$$

• $\varphi(e_1) = \varphi(1) = u \times 1 = a + ib = a.e_1 + b.e_2$
• $\varphi(e_2) = \varphi(i) = u \times i = ai - b = -b.e_1 + a.e_2$, donc

$$[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Exercice 11. 1. On avait vu que $[\varphi]_{\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, où $\mathcal{B}_c$ désigne la base canonique de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

2. Soient $s : x \mapsto a + bx + cx^2$ et $p : x \mapsto \alpha + \beta x + \gamma x^2$ deux éléments de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

$$\varphi(p) = s \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, a + bx + cx^2 = p(0) + p'(1)x + p(1)x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = p(0) \\ b = p'(1) \\ c = p(1) \end{cases}$$

Or $p(0) = \alpha$, $p(1) = \alpha + \beta + \gamma$ et, comme $p'(x) = 2\gamma x + \beta$, $p'(1) = 2\gamma + \beta$, donc finalement

$$\varphi(p) = s \Leftrightarrow \begin{cases} a & = & \alpha & & \\ b & = & 2\gamma & +\beta & \\ c & = & \alpha & +\beta & +\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = & \alpha \\ b+a-c & = & \gamma \\ c & = & a+\beta+\gamma \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & = & a \\ \beta & = & c-a-\gamma = c-a-(b+a-c) = -2a-b+2c \\ \gamma & = & b-a-c \end{cases}$$

Ainsi, étant donné s, il existe une unique fonction polynôme p de degré inférieur à 2 tel que $\varphi(p) = s$. Autrement dit, φ est bijective. C'est donc un automorphisme de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

3. φ étant un automorphisme de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, sa matrice dans n'importe quelle base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ est inversible, donc en particulier M est inversible.

On pourrait calculer son inverse à l'aide de la méthode du pivot de Gauss, mais c'est inutile car on a déjà fait tous les calculs nécessaires :

$$\varphi(p) = s \Leftrightarrow p = \varphi^{-1}(s)$$

donc les calculs ci-dessus signifient que

$$\varphi^{-1}(ae_0 + be_1 + ce_2) = ae_0 + (-2a-b+2c)e_1 + (b-a-c)e_2,$$

où (e_0, e_1, e_2) désigne la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ (rappel : e_0, e_1, e_2 sont les fonctions définies par $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$ et $e_2(x) = x^2$ $\forall x \in \mathbb{R}$), donc

$$M^{-1} = ([\varphi]_{\mathcal{B}_c})^{-1} = [\varphi^{-1}]_{\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vérification : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 13. 1. $P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3} = P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1} P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3} = P^{-1}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}$ donc la formule demandée est

$$M = A^{-1}B.$$

2. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Or, en développant par rapport à la première colonne (par exemple) :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{(-1)^{1+1} \times 1 \times \left|\begin{smallmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right|}_{-18} + \underbrace{(-1)^{2+1} \times 2 \times \left|\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right|}_{14} + \underbrace{(-1)^{3+1} \times 1 \times \left|\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{smallmatrix}\right|}_{5} = 1 \neq 0.$$

3. $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$. Or, en développant par rapport à la première ligne (pour changer) :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \underbrace{(-1)^{1+1} \times 2 \times \left|\begin{smallmatrix} -1 & -4 \\ 5 & 3 \end{smallmatrix}\right|}_{34} + \underbrace{(-1)^{1+2} \times 3 \times \left|\begin{smallmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right|}_{15} + \underbrace{(-1)^{1+3} \times 1 \times \left|\begin{smallmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 5 \end{smallmatrix}\right|}_{-14} = 35 \neq 0.$$

4. D'après la question 1,

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = (P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}})^{-1} P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}'},$$

où $\mathcal{B}_c$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Par définition,

$$P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

On calcule ensuite $(P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}})^{-1}$ par la méthode du pivot de Gauss (par exemple) :

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & -8 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -18 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Donc $(P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}})^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ (bien vérifier que $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{smallmatrix}\right) = I_3$) et

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = (P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}})^{-1} P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -52 & -38 & -31 \\ 15 & 12 & 10 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$