UPMC - L1 **2010-2011**
LM125

Chapitre 5
Applications linéaires et matrices

Exercice 1. Montrer que les applications suivantes sont $\mathbb{R}$-linéaires. Pour chacune, donner une base de son noyau et de son image, et en déduire si l'application est injective, surjective ou bijective.

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y) & \mapsto & (y, y+2x, x, y+2x) \end{cases}, \quad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (y, y+z, x+y+z) \end{cases},$$

$$f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y, x+2y+z) \end{cases}.$$

Exercice 2. Déterminer le rang de la famille de vecteurs $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, avec $v_1 = (1,2,-1,1,3)$, $v_2 = (1,0,1,1,2)$, $v_3 = (2,2,2,1,-1)$, $v_4 = (3,2,5,1,-5)$ et $v_5 = (2,2,0,2,5)$. Cette famille forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^5$?

Exercice 3. Soit f l'application linéaire du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ définie par $f((x,y,z)) = (x+2y+z, x-2y+z)$.

1. Déterminer la matrice A associée à f par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $f_1 = (1,0,-1)$, $f_2 = (1,1,0)$, $f_3 = (1,1,1)$, $v_1 = (1,1)$ et $v_2 = (1,-1)$. Vérifier que $\mathcal{B}_3 = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et que $\mathcal{B}_2 = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice A' associée à f par rapport aux bases $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_2$.
3. Trouver une base $\mathcal{B}_2'$ de $\mathbb{R}^2$ telle que la matrice associée à f par rapport aux bases $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_2'$ soit $A'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Étant donné un réel m, on considère l'endomorphisme φ_m de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$.

1. Soit $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (-1,1,0)$, $u_3 = (-1,0,1)$. Vérifier que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et déterminer la matrice A_m' associée à φ_m par rapport à $\mathcal{B}$.
2. En déduire que φ_m est un autmorphisme de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si m est différent de -2 et de 1.
3. On considère le cas $m = -2$. Donner une base de $\mathrm{Im}\varphi_{-2}$ et une base de $\mathrm{Ker}\varphi_{-2}$.
4. On considère le cas $m = 1$. Donner une base de $\mathrm{Im}\varphi_1$ et une base de $\mathrm{Ker}\varphi_1$.

Exercice 5. On considère l'application de l'espace vectoriel des matrices carrées réelles $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même définie par :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la matrice de φ relativement à la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 6. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (4x+3y, -2x-y) \end{array}$$

1. Déterminer la matrice de φ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer qu'il existe une base $B = (u_1, u_2)$ de $\mathbb{R}^2$ telle que la matrice de φ relativement à cette base soit la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 7. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f((x,y,z)) = (2x+y+z, y-z)$ et g celle de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $g((u,v)) = (u+v, u-v, v)$.

L'application $g \circ f$ est-elle définie ?

Si oui, déterminer la matrice de $g \circ f$ relativement aux bases canoniques, ainsi que l'image par $g \circ f$ d'un élément quelconque de l'espace de départ.

Exercice 8. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ des nombres complexes, muni de sa base usuelle $\mathcal{B} = (1, i)$. Soit $u = a + ib$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, un nombre complexe fixé non nul.

Montrer que l'application φ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie pour tout nombre complexe z par $\varphi(z) = uz$ est une application linéaire et déterminer sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 9. Soit $E = \mathcal{P}_3$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3, muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$. On définit l'endomorphisme L de E par

$$\begin{array}{rccc} L: & E & \to & E \\ & P & \mapsto & P + P' + P'' + P''' \end{array}$$

où P', P'' et P''' désignent respectivement les dérivées première, seconde et troisième de P.

1. En utilisant la définition d'une matrice associée à un endomorphisme relativement à une base, trouver la matrice $A = [L]_{\mathcal{B}}$.
2. Exprimer l'endomorphisme L à l'aide de l'endomorphisme D de E défini par $D(P) = P'$ puis utiliser la matrice $N = [D]_{\mathcal{B}}$ pour retrouver $A = [L]_{\mathcal{B}}$.
3. Calculer les endomorphismes $L \circ (id_E - D)$ et $(id_E - D) \circ L$. Qu'en déduit-on sur la matrice A ?
4. Trouver une fonction polynôme de degré au plus 3 solution de l'équation différentielle :

$$y''' + y'' + y' + y = Q \quad (*) \quad \text{où} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = x^3 - 2x^2 - x + 3.$$

Exercice 10. Soit $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \forall x \in \mathbb{R} \ \ f(x) = a + b\cos x + c \sin x\}$, et ψ_1, ψ_2, ψ_3 les fonctions définies par :

$$\begin{array}{rccc} \psi_1: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \psi_2: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \cos x \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \psi_3: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sin x \end{array}$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel admettant pour base $\mathcal{B} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$.
2. À tout élément f de E, on associe une fonction g définie par $g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que la fonction g ainsi définie est encore élément de E.
   (b) On appelle T l'application :

$$\begin{array}{rccc} T: & E & \to & E \\ & f & \mapsto & g \end{array}$$

   Vérifier que T est une application linéaire.

(c) Trouver la matrice A de l'application linéaire T relativement à la base $\mathcal{B}$.

3. (a) Construire une application
$$\begin{array}{rccc} U: & E & \to & E \\ & f & \mapsto & h \end{array}$$
telle que $U \circ T = T \circ U = \mathrm{id}_E$.

(b) En déduire que la matrice A est inversible et donner son inverse A^{-1} .

4. Montrer, sans calcul matriciel, l'égalité : $A^4 = I_3$.

Exercice 11. Soit $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et soit φ l'application linéaire de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même qui à toute fonction polynôme p de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ associe la fonction polynôme q définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, q(x) = p(0) + p'(1)x + p(1)x^2.$$

1. Écrire la matrice M de φ dans la base canonique de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que pour toute fonction polynôme s de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ il existe une fonction polynôme p et une seule telle que $\varphi(p) = s$. Que peut-on en conclure pour l'application φ ?
3. Montrer que la matrice M est inversible et déterminer sa matrice inverse.

Exercice 12. Déterminer dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ les matrices

1. de la symétrie par rapport à l'origine,
2. de la projection sur l'axe des y parallèlement à l'axe des x,
3. de la symétrie par rapport à l'axe des x,
4. de l'homothétie de centre O et de rapport μ,
5. de la rotation de centre O et d'angle α.

Exercice 13. 1. Soit E un espace vectoriel de dimension n sur un corps K, muni de trois bases $\mathcal{B}_1 = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$, $\mathcal{B}_2 = (a_1, \cdots, a_n)$ et $\mathcal{B}_3 = (b_1, \cdots, b_n)$.
On note $A = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$, $B = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}$ et $M = P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}$. Exprimer M en fonction de A et B.

2. (a) Montrer que les vecteurs $e_1 = (1, 2, 1)$, $e_2 = (2, 3, 3)$ et $e_3 = (3, 7, 1)$ déterminent une base $\mathcal{B}$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

(b) Montrer que les vecteurs $e'_1 = (2, -3, 1)$, $e'_2 = (3, -1, 5)$ et $e'_3 = (1, -4, 3)$ déterminent une base $\mathcal{B}'$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

(c) Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 14. Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré au plus 2, muni de la base canonique $\mathcal{B} = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$. On définit les éléments f_0, f_1 et f_2 de E par :

$$\begin{array}{rccc} f_0: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 1+x \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f_1: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x+x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f_2: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

On appelle L l'endomorphisme de E défini par :

$$\begin{array}{rccl} L: & E & \to & E \\ & p & \mapsto & q: \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto p(x) + xp'(x) \end{cases} \end{array}$$

1. Vérifier que $\mathcal{B}' = (f_0, f_1, f_2)$ est une base de E. Trouver la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et celle de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

2. Calculer la matrice associée à L par rapport à la base canonique puis celle associée à L par rapport à la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 15. Déterminer le rang de la matrice réelle $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ en se servant de la définition du rang d'une matrice.

Exercice 16. 1. Déterminer le rang des matrices A, B et C suivantes en utilisant les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes des matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -5 & 0 & -7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Parmi ces matrices, lesquelles sont inversibles ?

Exercice 17. Soient A une matrice appartenant à $M_{p,n}(\mathbb{R})$, B une matrice appartenant à $M_{n,q}(\mathbb{R})$, f l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ associée à la matrice A relativement aux bases canoniques $\mathcal{B}_n$ de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}_p$ de $\mathbb{R}^p$, g l'application linéaire de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^n$ associée à la matrice B relativement aux bases canoniques $\mathcal{B}_q$ de $\mathbb{R}^q$ et $\mathcal{B}_n$ de $\mathbb{R}^n$.

1. (a) Soit $\{u_1, ..., u_k\}$, $1 \leq k \leq q$, une famille de k vecteurs de $\mathbb{R}^q$. On suppose que la famille $\{f(g(u_1)), ..., f(g(u_k))\}$ est libre, montrer que la famille $\{g(u_1), ..., g(u_k)\}$ est libre.
   (b) En déduire que le rang du produit AB est inférieur ou égal au rang de B.
2. Montrer que le rang du produit AB est aussi inférieur ou égal au rang de A.