UPMC - L1 **2010-2011**
LM125

Chapitre 6
Correction de quelques exercices

Exercice 9. En développant par rapport à la deuxième colonne (par exemple) :

$$\det(A)=\begin{vmatrix}2&1&4\\1&0&3\\1&2&-1\end{vmatrix}=\underbrace{(-1)^{1+2}\times 1\times\left|\begin{smallmatrix}1&3\\1&-1\end{smallmatrix}\right|}_{4}+\underbrace{(-1)^{3+2}\times 2\times\left|\begin{smallmatrix}2&4\\1&3\end{smallmatrix}\right|}_{-4}=0.$$

La matrice A n'est donc pas inversible, et son rang est donc inférieur ou égal à 2. Comme les deux premières colonnes sont linéairement indépendantes (elles ne sont pas multiples l'une de l'autre), le rang de A est aussi supérieur ou égal à 2. Finalement, $\mathrm{rg}(A)=2$.

Le rang d'une matrice ne change pas si on lui applique des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, donc

$$\mathrm{rg}(B)\overset{\substack{C_3\leftarrow C_3-C_1\\C_4\leftarrow C_4-C_1}}{=}\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&-5&0\\-1&-1&2&2\\1&2&1&0\end{pmatrix}\overset{\substack{C_3\leftarrow C_3+5C_2\\C_4\leftarrow \frac12 C_4}}{=}\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\-1&-1&-3&1\\1&2&11&0\end{pmatrix}$$
$$\overset{\substack{C_3\leftarrow C_3+3C_4\\C_4\leftrightarrow C_3}}{=}\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\-1&-1&1&0\\1&2&0&11\end{pmatrix}=4$$

or $B\in\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ donc B est inversible.

Exercice 11. 1. En développant par rapport à la première colonne (par exemple) :
$\det(A)=(-1)^{1+1}\times 1\times\left|\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\end{smallmatrix}\right|+(-1)^{3+1}\times 1\times\left|\begin{smallmatrix}0&1\\1&1\end{smallmatrix}\right|=-2\neq 0$ donc A est inversible, et

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}{}^t(\mathrm{cof}(A)),$$

où $\mathrm{cof}(A)$ désigne la matrice des cofacteurs de A, c'est-à-dire la matrice 3×3 dont le coefficient d'indices (i,j), pour tous $1\le i,j\le 3$, vaut $(-1)^{i+j}\det A_{i,j}$, $A_{i,j}$ désignant la matrice 2×2 obtenue à partir de A en effaçant la i-ème ligne et la j-ème colonne.

- $(-1)^{1+1}\det A_{1,1}=\left|\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\end{smallmatrix}\right|=-1$ • $(-1)^{1+2}\det A_{1,2}=-\left|\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right|=1$ • $(-1)^{1+3}\det A_{1,3}=\left|\begin{smallmatrix}0&1\\1&1\end{smallmatrix}\right|=-1$
- $(-1)^{2+1}\det A_{2,1}=-\left|\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right|=1$ • $(-1)^{2+2}\det A_{2,2}=\left|\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\end{smallmatrix}\right|=-1$ • $(-1)^{2+3}\det A_{2,3}=-\left|\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right|=-1$
- $(-1)^{3+1}\det A_{3,1}=\left|\begin{smallmatrix}0&1\\1&1\end{smallmatrix}\right|=-1$ • $(-1)^{3+2}\det A_{3,2}=-\left|\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right|=-1$ • $(-1)^{3+3}\det A_{3,3}=\left|\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right|=1$

Donc $\mathrm{cof}(A)=\left(\begin{smallmatrix}-1&1&-1\\1&-1&-1\\-1&-1&1\end{smallmatrix}\right)$, ${}^t(\mathrm{cof}(A))=\mathrm{cof}(A)$ et $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}{}^t(\mathrm{cof}(A))=\begin{pmatrix}\frac12&-\frac12&\frac12\\-\frac12&\frac12&\frac12\\\frac12&\frac12&-\frac12\end{pmatrix}$.

Remarque. Cet exercice a pour unique but de faire appliquer la définition de la matrice des cofacteurs (très utile pour la *théorie*). Dans la pratique, pour calculer l'inverse d'une matrice 3×3 (ou plus), préférez la méthode du pivot de Gauss !

2.

$$\det(B_k)=\left|\begin{smallmatrix}k&3&1\\4&2&1\\1&1&1\end{smallmatrix}\right|\overset{\substack{C_1\leftarrow C_1-C_3\\C_2\leftarrow C_2-C_3}}{=}\left|\begin{smallmatrix}k-1&2&1\\3&1&1\\0&0&1\end{smallmatrix}\right|=(-1)^{3+3}\times 1\times\left|\begin{smallmatrix}k-1&2\\3&1\end{smallmatrix}\right|=k-7,$$

donc B_k est inversible si et seulement si $k \neq 7$. Dans ce cas, calculons B_k^{-1} :

$$B_k^{-1} = \frac{1}{\det(B_k)}{}^t(\mathrm{cof}(B_k)),$$

où $\mathrm{cof}(B_k)$ est la matrice 3×3 dont le coefficient d'indices (i, j), pour tous $1 \leq i, j \leq 3$, vaut $(-1)^{i+j}\det B_{i,j}$, où $B_{i,j}$ est la matrice 2×2 obtenue à partir de B_k en effaçant la i-ème ligne et la j-ème colonne.

- $(-1)^{1+1}\ \det B_{1,1}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}= 1$
- $(-1)^{1+2}\ \det B_{1,2}=-\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}= -3$
- $(-1)^{1+3}\ \det B_{1,3}=\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2$
- $(-1)^{2+1}\ \det B_{2,1}=-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-3$
- $(-1)^{2+2}\ \det B_{2,2}=\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}= k-1$
- $(-1)^{2+3}\ \det B_{2,3}=-\begin{vmatrix} k & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=3-k$
- $(-1)^{3+1}\ \det B_{3,1}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}= 3$
- $(-1)^{3+2}\ \det B_{3,2}=-\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1-k$
- $(-1)^{3+3}\ \det B_{3,3}=\begin{vmatrix} k & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=2k-12$

$$\text{Donc} \quad B_k^{-1} = \frac{1}{\det(B_k)}{}^t(\mathrm{cof}(B_k)) = \frac{1}{k-7}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -3 & k-1 & 1-k \\ 2 & 3-k & 2k-12 \end{pmatrix}.$$