UPMC - L1 **2010-2011**
LM125

Chapitre 6
Déterminants

Exercice 1. Déterminant et produit de matrices.

1. Soient $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Calculer $\det B$, $\det C$ et $\det(BC)$. Que remarquez-vous ? Cette formule est-elle générale ?
2. *Rappel* : une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *nilpotente* s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$.
   Montrer que si A est nilpotente alors $\det(A) = 0$.

Exercice 2. Non linéarité du déterminant. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\det A$, $\det B$ et $\det(A + B)$. Que remarquez-vous ?
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer $\det(\lambda A)$ et $\lambda \det A$. Que remarquez-vous ? Dans le cas général (en dimension n) quelle relation lie $\det(\lambda A)$ et $\det A$.

Exercice 3. Déterminant et inverse d'une matrice.

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Quelle relation lie le déterminant d'une matrice inversible et celui de son inverse ?
2. Montrer que les matrices précédentes sont inversibles et calculer le déterminant de leur inverse.

Exercice 4. Développement du déterminant par rapport à une ligne ou à une colonne.

1. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$ en utilisant un développement par rapport à une ligne bien choisie.
2. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 7 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}$ en utilisant un développement par rapport à une colonne bien choisie.

Exercice 5. Calculs de déterminants. Calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 2 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1+i & 1-2i & 1+i \\ 1-2i & 1+i & 1+i \\ 1+i & 1+i & 1-2i \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Exercice 6. Linéarité par rapport aux colonnes. Soient $a, b, c, d, e, f, g, h, k$ des réels. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2d & g-a & 3g \\ 2e & h-b & 3h \\ 2f & k-c & 3k \end{pmatrix}.$$

Exprimer $\det B$ en fonction de $\det A$.

Exercice 7. Soient $u_1 = (-2, 2, 1)$ et $u_2 = (2, 0, 3)$.
1. Montrer que u_1 et u_2 sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan vectoriel F engendré par u_1 et u_2.

Exercice 8. Soient m un réel et $u_1=(m-2,2m-2,-1)$, $u_2=(2,m^2-m,2)$, $u_3=(2m,2m^2-2,m+1)$.
1. Déterminer l'ensemble des réels m tels que la famille $\{u_1,u_2,u_3\}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le rang de la famille $\{u_1,u_2,u_3\}$ selon les valeurs de m.

Exercice 9. Calculer le rang des matrices $A=\begin{pmatrix}2&1&4\\1&0&3\\1&2&-1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\2&1&-3&2\\-1&-1&1&1\\1&2&2&1\end{pmatrix}$.

Ces matrices sont-elles inversibles ?

Exercice 10. On considère le système suivant dépendant du paramètre réel m :

$$\begin{cases}3mx+2y-2z &=1\\ -mx+my+z &=m\\ mx+y+mz &=1\end{cases}$$

1. Donner une interprétation vectorielle dans $\mathbb{R}^3$ de ce système.
2. Pour quelles valeurs de m le système considéré admet-il une unique solution ?
3. Déterminer cette solution pour les valeurs de m trouvées à la question précédente.

Exercice 11. 1. La matrice $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, calculer A^{-1} en utilisant la comatrice de A.
2. Soit $k\in\mathbb{R}$ un réel. Déterminer si la matrice $B_k=\begin{pmatrix}k&3&1\\4&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ est inversible, et, le cas échéant, calculer son inverse en utilisant la comatrice de B_k.

Exercice 12. Soient a,b deux paramètres réels et $M_{a,b}$ la matrice

$$M_{a,b}=\begin{pmatrix}5&2&4&-1\\3&-4&0&1\\a&b&2&-1\end{pmatrix}.$$

1. Donner les valeurs minimales et maximales possibles pour le rang de $M_{a,b}$.
2. Déterminer l'ensemble des valeurs de a et b pour lesquelles $\mathrm{rg}(M_{a,b})=2$.

Exercice 13. Calculer $D_n(x)=\begin{vmatrix}x&1&\cdots&1\\ \vdots&\ddots&&\vdots\\ \vdots&&\ddots&\vdots\\ 1&1&\cdots&x\end{vmatrix}$.

Exercice 14. Soit n un entier naturel ≥ 1 et $D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\1&1&2&\cdots&n-2&n-1\\ \vdots&&&&n-3&n-2\\ \vdots&&&&&\vdots\\ 1&1&\cdots&\cdots&1&1\end{vmatrix}$.
1. Trouver une relation de récurrence entre D_n et D_{n-1} (pour $n\geq 2$).
2. En déduire une expression de D_n en fonction de n.

Exercice 15. Linéarité par rapport aux colonnes (bis). Soit n un entier naturel >1, $a_1,...,a_n$ des nombres réels et $M=(\sin(a_i+a_j))_{1\leq i,j\leq n}$.
1. Montrer que $\det M=0$ si $n\geq 3$.
2. Calculer $\det M$ pour $n=2$.

Exercice 16. On considère une matrice A à coefficients entiers (on notera $A\in M_n(\mathbb{Z})$).
Montrer l'équivalence suivante :
A est inversible et $A^{-1}\in M_n(\mathbb{Z})\Leftrightarrow det(A)=\pm 1$.