UPMC - L1 **2010-2011**
LM125

Chapitre 7
Diagonalisation

Exercice 1. Soit f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pour chaque endomorphisme, répondre aux questions suivantes :

1. L'endomorphisme est-il diagonalisable ?
2. Si oui, trouver une base formée de vecteurs propres de l'endomorphisme et donner la matrice de l'endomorphisme dans cette base.

Exercice 2. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est diagonalisable, trouver une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f et donner la matrice de f dans cette base.
2. Déterminer, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, la matrice A^n.

Exercice 3.

1. Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$. On considère A comme un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   Montrer que si λ est une valeur propre complexe et non réelle de A alors $\bar{\lambda}$ est aussi valeur propre de A et que si T, élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, alors $\bar{T}$ (vecteur dont les composantes sont les conjuguées des composantes de T) est un vecteur propre associé à $\bar{\lambda}$.
2. On considère la matrice
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Montrer que A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Trouver, dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 4. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -4 & 8 & 4 \\ 5 & -10 & -5 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
2. Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 5. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $f(e_2)$, $f(e_1 + e_3)$ et $f(e_1 - e_3)$.
2. En déduire que f est diagonalisable, et déterminer la matrice A' de f dans une base de vecteurs propres.
3. Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 6. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relativement à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha \text{ est élément de } [0, \pi[.$$

1. Montrer que pour tout α cette matrice est semblable à une matrice diagonale indépendante de α.
2. Donner une interprétation géométrique de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice par rapport à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq 4 \\ 1\leq j\leq 4}}$ avec $a_{i,j} = 1$ pour tout i et pour tout j compris entre 1 et 4.

1. Montrer sans calculer le polynôme caractéristique que 0 est valeur propre de f.
2. Montrer que le vecteur $v = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ est un vecteur propre de f.
3. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^4$, formée de vecteurs propres de f. Déterminer la matrice de f dans cette base.

Exercice 8. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice relativement à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & d & 2 & 0 \\ c & e & k & 2 \end{pmatrix}.$$

Quelle condition nécessaire et suffisante les réels a, b, c, d, e et k doivent-ils vérifier pour que f soit diagonalisable ?

Exercice 9. Soit $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ n éléments de $\mathbb{K}$. On note $M(a_0, a_1, ..., a_{n-1})$ la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \ddots & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & & & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de cette matrice.
2. En déduire que pour tout polynôme $P(X)$ appartenant à $\mathbb{K}[X]$ et s'écrivant sous la forme $P(X) = (-1)^n X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + ... + \alpha_0$, il existe une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est $P(X)$.
3. On considère le polynôme $P(X) = X^4 - 5X^3 + 3X^2 - X + 1$. Donner une matrice M de $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$ ayant $P(X)$ pour polynôme caractéristique.

Exercice 10. Soit a et b des nombres réels et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = a, u_1 = b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

On définit, pour tout entier n positif ou nul, le vecteur colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ (espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices à 2 lignes et 1 colonne).

1. Montrer qu'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'égalité $X_{n+1} = AX_n$, où A est une matrice carrée d'ordre 2, à déterminer.
2. En déduire l'égalité $X_n = A^n X_0$, pour tout entier n positif ou nul.
3. Montrer que A est semblable à une matrice diagonale. Calculer A^n.
4. En déduire une formule donnant la valeur de u_n en fonction de a, b et n.

Exercice 11. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et f un endomorphisme de E.

On dit qu'un sous-espace vectoriel H de E est stable par f si l'image par f de tout élément de H appartient à H (i.e $f(H) \subset H$).

1. Montrer qu'un sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs propres est stable par f.
2. **On suppose que f est un endomorphisme de E diagonalisable.** Montrer que tout sous-espace vectoriel de E stable par f admet un supplémentaire stable par f.

Exercice 12. Soit a et b deux réels et $M(a, b)$ la matrice réelle $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Cette matrice est-elle diagonalisable ? Si oui, trouver une matrice diagonale $D(a, b)$ et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $M(a, b) = PD(a, b)P^{-1}$.

Exercice 13. Dans chacun des cas suivant, déterminer pour quelles valeurs de α, β et $\gamma \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ est diagonalisable :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 2 & \gamma \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$