Devoir surveillé du 8 mars 2016

Documents, calculatrices, et téléphones portables sont interdits.
La clarté de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.
Les exercices sont indépendants. Durée de l'épreuve : 2 heures

Exercice 1
Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions f_n sur les intervalles spécifiés dans les cas suivants.

$$(1)\ f_n(x) = \frac{nx}{n^2+x^2} \text{ sur } \mathbb{R}, \quad (2)\ f_n(x) = \sin\frac{x}{n} \text{ sur } \mathbb{R}, \quad (3)\ f_n(x) = \sin\frac{x}{n} \text{ sur } [0,1].$$

Exercice 2
Étudier la convergence simple, uniforme et normale sur les intervalles spécifiés des séries de fonctions de terme général u_n dans les cas suivants.

$$(1)\ u_n(x) = \sin\frac{x}{n^2} \text{ sur } \mathbb{R}, \quad (2)\ u_n(x) = \frac{1}{n^2}\sin x \text{ sur } \mathbb{R}, \quad (3)\ u_n(x) = \frac{1}{n}\sin\frac{x}{n} \text{ sur } [0,1].$$

Exercice 3
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \ln x & \text{si } x \in]0,1], \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que les fonctions f_n sont continues sur $[0,1]$ pour tout $n \geq 1$.
2. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers une limite f sur $[0,1]$.
3. Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$.
4. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, f_n est dérivable en 0 et calculer $f_n'(0)$.
5. Déterminer la limite simple de la suite f_n' sur $[0,1]$.
6. La suite f_n' converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

Exercice 4

1. On considère une série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ qui converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$, de somme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$. On suppose que, pour chaque n, la fonction u_n admet une limite finie ℓ_n en $+\infty$.
   (a) Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \ell_n$ converge (en montrant la suite des sommes partielles est une suite de Cauchy).
   (b) Montrer que $f(x)$ tend vers $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$ quand $x \mapsto +\infty$.
2. Applications.
   (a) En posant $u_n(x) = e^{-\frac{n}{1+x^2}}$, montrer que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge simplement mais pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x^2n^2}$
      i. Déterminer le domaine de défintion de f.
      ii. Déterminer la limite en $+\infty$ de f
      iii. Déterminer la limite à droite en 0 de $x \mapsto xf(x)$.

Université Grenoble Alpes | **Licence Sciences et Technologies**
MAT 242 | **Année 2015-2016**

Examination I, march 8, 2016

The use of documents, calculators and cellphones is forbidden
The quality of writing and explanations will be taken into account.
All exercises are independant from one another. Test duration : 2 hours

Exercise 1
Study pointwise and uniform convergence of the following sequences of functions on the specified intervals.

$$(1)\ \ f_n(x) = \frac{nx}{n^2+x^2} \text{ on } \mathbb{R}, \quad (2)\ \ f_n(x) = \sin\frac{x}{n} \text{ on } \mathbb{R}, \quad (3)\ \ f_n(x) = \sin\frac{x}{n} \text{ on } [0,1].$$

Exercise 2
Study pointwise, uniform and normal convergence of the series of functions with general term u_n given below, on the specified intervals.

$$(1)\ \ u_n(x) = \sin\frac{x}{n^2} \text{ on } \mathbb{R}, \quad (2)\ \ u_n(x) = \frac{1}{n^2}\sin x \text{ on } \mathbb{R}, \quad (3)\ \ u_n(x) = \frac{1}{n}\sin\frac{x}{n} \text{ on } [0,1].$$

Exercice 3
For every $n \in \mathbb{N}^*$, define

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \ln x & \text{si } x \in]0,1], \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Prove that the functions f_n are continuous on $[0,1]$ for all $n \geq 1$.
2. Prove that the sequence $(f_n)_{n\geq 1}$ converges pointwise to a limit function f on $[0,1]$.
3. Study the uniform convergence of the sequence $(f_n)_{n\geq 1}$.
4. Prove that for every $n \geq 2$, f_n is differentiable at the point 0 and compute $f_n'(0)$.
5. Find the pointwise limit of f_n' on $[0,1]$.
6. Does the sequence f_n' converge uniformly on $[0,1]$?

Exercise 4

1. We consider a series of functions $\sum_{n\geq 0} u_n$ which converges uniformly on $\mathbb{R}_+$, and we denote its sum by $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$. We assume that for each n, the function u_n has a finite limite ℓ_n in $+\infty$.
   (a) Prove that the series $\sum_{n\geq 0} \ell_n$ converges (hint : prove that the sequence of partial sums is a Cauchy sequence)
   (b) Prove that $f(x)$ tends to $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$ when $x \mapsto +\infty$.
2. Applications.
   (a) Taking $u_n(x) = e^{-\frac{n}{1+x^2}}$, prove that the series $\sum_{n\geq 0} u_n$ converges pointwise but not uniformly on $\mathbb{R}_+$.
   (b) This time, we take $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x^2n^2}$
      i. Find the domain of definition of f.
      ii. Find the limit in $+\infty$ of f.
      iii. Find the limit at the point 0^+ of the function $x \mapsto xf(x)$.