TD n^{o} 5 : Intégrales généralisées

Organisation : les exercices sont divisés en trois catégories : * correspond aux exercices de base, à maîtriser impérativement, ** correspond aux exercices de difficulté moyenne, c'est en gros le niveau requis pour valider l'UE, *** correspond aux exercices plus avancés.

* Définitions à connaître par cœur

Définition de la convergence d'une intégrale généralisée.

Définition de l'absolue convergence d'une intégrale généralisée.

* Propriétés à connaître par cœur

Théorèmes de comparaison pour les fonctions positives.

La convergence absolue entraîne la convergence.

Exercice 1. * Intégration par parties
Déterminer une primitive F de la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : [0,+\infty[& \to & [0,+\infty[\\ t & \mapsto & t^2 e^{-t} \end{array}$$

En déduire que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, et déterminer sa valeur.

Exercice 2. * Une fraction rationnelle

1. Calculer pour $X > 0$:
$$I(X) = \int_1^X \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$$
2. Quelle est la limite lorsque $X \to +\infty$ de $I(X)$? Que peut-on donc dire de l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$?

Exercice 3. *Changement de variable
Soit $X \in [0, +\infty[$. Calculer $I(X) = \int_0^X \frac{dt}{\operatorname{ch} t}$ puis déterminer la limite de $I(X)$ lorsque $X \to +\infty$.

Exercice 4. ** Nature d'intégrales impropres
Déterminer la nature de chacune des intégrales impropres suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x + e^{-x}}\,dx$;
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{x + e^{-x}}\,dx$;
3. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x + e^{-x}}\,dx$;
4. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^2 + 1}\,dx$;
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$;
6. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} e^{-x}\,dx$;
7. $\displaystyle\int_0^{\infty} (x + 2 - \sqrt{x^2 + 4x + 1})\,dx$;
8. $\displaystyle\int_1^{\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt{x^2 + 1})\,dx$;

9. $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-\sqrt{x^2-x}}\,dx$;

10. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(\ln x)^3}\,dx$;

11. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2+\sin x+\sin^2 x}{\sqrt[3]{x^4+x^2}}\,dx$;

12. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$;

13. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{1-x}\,dx$;

Exercice 5. ** Limite et convergence de l'intégrale

1. Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ une fonction continue par morceaux telle que $f(t)\to \ell$ quand $t\to+\infty$, avec $\ell>0$ ou $\ell=+\infty$. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.
2. Donner un exemple de fonction continue par morceaux $g : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ telle que $g(t)\not\to 0$ quand $t\to+\infty$ et $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ converge.

Exercice 6. **Deux équivalents

1. Déterminer la nature des intégrales impropres $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$.
2. Pour tout $x>0$, on pose $f(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$. Calculer sa limite en $+\infty$.
3. Utiliser une intégration par parties pour montrer que $f(x)\sim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{x}$.
4. Montrer que $f(x)\sim_{x\to 0^+} \ln\frac{1}{x}$.

Exercice 7. ** Dérivée logarithmique

Soit $f : [0,+\infty[\to]0,+\infty[$ une fonction continue. Pour tout $x\in[0,+\infty[$ on note $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

Montrer que les intégrales impropres $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{F(t)}\,dt$ ont même nature.

Exercice 8. Tiré de l'examen de rattrapage 2010

Pour tout entier $n\geqslant 0$ on pose

$$u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos^2 x}{1+x}\,dx, \qquad v_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{1+x}\,dx$$

1. Calculer $a_n := u_n+v_n$ et vérifier que la série $\sum_n a_n$ diverge.
2. En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n>0$ on a
$$|u_n-v_n|\leqslant \frac{1}{2\pi n^2}$$
3. Déduire des résultats précédents que $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont deux séries divergentes.
4. Si α est un paramètre réel, on pose
$$f_\alpha(x)=\frac{\sin^2 x}{(1+x)^\alpha} \quad \forall x\geqslant 0$$
Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la fonction f_α est intégrable sur $[0,+\infty[$.

<u>Intégrales impropres, cas général</u>

Exercice 9. *$\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}\, dt$ n'est pas absolument convergente**
Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\, dt\ .$$

1. Déterminer un réel $a > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [n\pi + \frac{\pi}{4}, n\pi + \frac{3\pi}{4}]$, $|\sin(x)| \geq a$.
2. En déduire un réel $b > 0$ tel que $u_n \geq \frac{b}{n+1}$ pour tout $n \geq 1$.
3. En déduire que $\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}\, dt$ est divergente.

Exercice 10. ** Nature d'intégrales impropres
Déterminer la nature de chacune des intégrales impropres suivantes.

1. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\cos x}{\ln(x)}\, dx\,;$
2. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin(x-1)}{\ln(x)}\, dx\,;$
3. $\displaystyle\int_0^1 \sin(\frac{1}{t})\, dt\,;$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos\frac{2}{x}}{x}\, dx\,;$

Exercice 11. *$\int_0^{+\infty} f(t^\alpha)\, dt$ pour une fonction périodique de moyenne nulle**
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique, de période 1, et telle que $\int_0^1 f(t)\, dt = 0$. On rappelle qu'une fonction continue sur un intervalle compact est bornée sur cet intervalle.

1. Montrer que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$, et en déduire que la fonction F définie par $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t^a}\, dt$ converge pour tout $\alpha \in]0, 1[$.
3. En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t^\alpha)\, dt$ converge pour tout $\alpha > 1$.
4. Montrer que $\int_0^{+\infty} \sin(\sqrt{t})\, dt$ est divergente.

Exercice 12. ** Avec paramètre

1. Etudier suivant les valeurs de α et β la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta}$.
2. Même question avec $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$.

Exercice 13. ** Astuce

1. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}$ converge.
2. En faisant le changement de variable, $t = \frac{1}{x}$, calculer l'intégrale précédente.

Exercice 14. ** Exercice seconde session 2017

1. Montrer que pout $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\sin^2 t = \frac{\tan^2 t}{1+\tan^2 t}$.
   Soit $a > -1$.
   Montrer en faisant le changement de variable $x = \tan t$ que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+a\sin^2 t} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}$.
2. Montrer que $\int_0^{\pi} \frac{dt}{1+a\sin^2 t} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+a\sin^2 t}$.
3. Soit $u_n = \int_0^{\pi} \frac{dt}{1+(n\pi)^\alpha \sin^2 t}$ où α est un réel strictement positif.
   Montrer que la série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha > 2$.
4. Soit $v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1+t^\alpha \sin^2 t}$. Etudier la convergence de la série de terme général v_n.
5. Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha \sin^2 t}$?

Exercice 15. ** Exercice seconde session 2017

Soit pour n entier, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$.

1. Montrer la convergence de I_n pour tout n.
2. Après avoir montré que $I_n - I_{n+1} = \int_0^{+\infty} x \frac{x}{(1+x^2)^{n+2}} dx$ et fait une intégration par parties, montrer que $I_{n+1} = \frac{2n+1}{2(n+1)} I_n$.
3. On pose $u_n = \sqrt{n} I_n$. Montrer que $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln(1 + \frac{1}{2n}) - \frac{1}{2}\ln(1 + \frac{1}{n})$.
   En utilisant un développement limité de $\ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 2, montrer que la série de nterme général $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ converge.
   En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $I_n \sim \frac{C}{\sqrt{n}}$.

Exercice 16. ** Intégrales de Wallis

Les intégrales de Wallis sont données par $I_n = \int_0^{\pi} (\sin\theta)^n d\theta$.

1. Montrer que $I_0 = \pi$ et $I_1 = 2$, et que la suite (I_n) est décroissante.
2. Montrer la relation de récurrence $I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{2n} = \pi \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$, $I_{2n+1} = 2 \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$.
4. Montrer que $I_{2n} \sim I_{2n+1} \sim I_{2n+2}$, et en déduire que $I_{2n}^2 \sim I_{2n} I_{2n+1} \sim \frac{\pi}{n}$.

Exercice 17. ***Un calcul d'intégrale

On s'intéresse à l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{[t]}}{t} dt$ où $[t]$ est la partie entière de t.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, écrire $\displaystyle\int_1^n \frac{(-1)^{[t]}}{t} dt$ comme la somme partielle d'une série. En déduire que $\displaystyle\int_1^n \frac{(-1)^{[t]}}{t} dt$ admet une limite notée I.
2. Pour montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{[t]}}{t} dt$ converge, il faut montrer que $\displaystyle\int_1^x \frac{(-1)^{[t]}}{t} dt$ admet une limite quand x tend vers $+\infty$. L'étude en une suite particulière ne suffit pas (ex : $\int_0^n \cos(x\pi)\, dx$).
   Montrer que $\displaystyle\int_1^x \frac{(-1)^{[t]}}{t} dt = \int_1^{[x]} \frac{(-1)^{[t]}}{t} dt + \int_{[x]}^x \frac{(-1)^{[t]}}{t} dt$.
   Montrer que $|\int_{[x]}^x \frac{(-1)^{[t]}}{t} dt| \leq \ln \frac{x}{x-1}$.
   En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{[t]}}{t} dt$ converge et que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{[t]}}{t} dt = I$.
3. Donner la valeur de I en utilisant les intégrales de Wallis.